Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2008/2009
II Emisemestre - Settimana 2 - Foglio 10
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, con riferimento (O, e), siano date
(i) la retta r passante per il punto P, di coordinate $(1, -1, 1)$, e parallela al vettore $\overline{v}$, di componenti rispetto ad e $(1, -1, 1)$, e
(ii) la retta s, definita dal sistema di equazioni $X_1 - 2 = 2X_2 - X_3 - 2 = 0$.
Stabilire se r e s sono rette sghembe.
Svolgimento: La retta s ha giacitura data dal sistema omogeneo

$$X_1 = 2X_2 - X_3 = 0.$$

Pertanto, risolvendo tale sistema, vediamo che la giacitura di s è il vettore $\overline{w}$, di componenti rispetto ad e, $(0, 1, 2)$. Poichè le due giaciture non sono proporzionali, si deduce che le rette r e s non sono parallele. Se non fossero sghembe, allora dovrebbero intersecarsi in un punto. I punti della retta r sono della forma $P +_a t\overline{v}$, cioè hanno coordinate

$$(1 + t, -1 - t, 1 + t)$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Sostituire queste coordinate variabili nelle equazioni che definiscono s equivale a cercare il valore di t per cui si ha l'eventuale intersezione tra r e s. Seguendo tale procedimento, si ottiene il sistema di equazioni lineari nel parametro t:

$$t - 1 = 3t + 5 = 0$$

che è manifestamente incompatibile. Quindi $r \cap s = \emptyset$; pertanto le due rette sono sghembe

Esercizio 2: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con riferimento (O, e), sia dato il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Si considerino i parallelogrammi:
• $OABC$, avente OA ed AB per lati ed OB per diagonale, e
• $OADB$, avente OB ed OA per lati ed AB per diagonale.
Sia E il punto di intersezione tra le rette r_{AC} e r_{OD}. Dimostrare che B, E ed il punto medio F del segmento OA sono allineati.

Svolgimento: La retta $r_{A,B}$ ha giacitura generata dal vettore $B -_a A = (-1, 1)$; quindi un'equazione che determina questa giacitura è

$$X_1 + X_2 = 0.$$

Il punto C è l'intersezione delle rette

$$X_1 + X_2 = 0 \;\text{ e }\; X_2 = 1$$

quindi $C = (-1, 1)$. Il punto D è l'intersezione delle rette

$$X_1 = 1 \;\text{ e }\; X_2 = 1$$

quindi $D = (1, 1)$. La retta per A e C è la retta passante per A e con giacitura generata dal vettore $C_a A$, quindi è

$$X_1 + 2X_2 - 1 = 0.$$

Analogamente, quella per O e D è

$$X_1 - X_2 = 0;$$

quindi, essendo E il punto di intersezione di queste ultime due rette, si ha $E = (1/3, 1/3)$. Infine F, essendo punto medio del segmento OA, ha coordinate $F = (1/2, 0)$. La retta $r_{E,F}$ è quindi

$$2X_1 + X_2 - 1 = 0.$$

Le coordinate di B soddisfano quest'equazione, quindi B appartiene a $r_{E,F}$.

Esercizio 3: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano (O, e), è data la retta r rappresentata dall'equazione $X_1 + X_2 = 1$. Determinare tutte le affinità di $\mathbb{R}^2$ che fissano tutti i punti di r e che trasformano il punto $P = (1, 2)$ nel punto $Q = (2, 1)$.

Svolgimento. Sappiamo che i luogo dei punti fissi di un'affinità se non vuoto è per forza una varietà lineare. Allora per avere affinità che fissano tutti i punti di r basta determinare quelle affinità che fissano 2 punti distinti di r. Infatti, poichè l'unione di due punti distinti non è una varietà lineare, se questi restano fissi sotto l'azione di un'affinità f, allora tutti i punti della retta r restano fissi sotto l'azione di f.

Prendiamo allora i due punti $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (1, 0)$ su r. Un'affinità è della forma

$$f(\overline{x}) = A\,\overline{x} + \overline{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

con A matrice invertibile. Se imponiamo

$$f(P_1) = P_1, \quad f(P_2) = P_2,$$

otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene il sistema di 4 equazioni:

$$a_{12} = a_{11} - 1, \; a_{21} = a_{22} - 1, \; b_1 = 1 - a_{11}, \; b_2 = 1 - a_{22}.$$

Quindi, le affinità che fissano tutti i punti di r sono ∞^2 dato che sono della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} - 1 \\ a_{22} - 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} \end{pmatrix},$$

con $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ parametri indipendenti, tali che $a_{11} + a_{22} \neq 1$, per la condizione di invertibilità di A.

Ora imponiamo la condizione ulteriore che $f(P) = Q$, che fornisce

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} - 1 \\ a_{22} - 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si determina allora

$$a_{11} = \frac{3}{2}, \quad a_{22} = \frac{1}{2}.$$

Dunque esiste un'unica affinità che soddisfa tutte le condizioni richieste. Le equazioni di tale affinità sono:

$$Y_1 = \frac{1}{2}(3X_1 + X_2 - 1) \;\; Y_2 = \frac{1}{2}(-X_1 + X_2 + 1).$$

Esercizio 4: Siano $\overline{v} = (1, 2)$, $\overline{w} = (-1, -1)$ due vettori del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Sia S l'isometria lineare data dalla riflessione rispetto all'asse x_1, i.e. rispetto a $Lin(\overline{e}_1)$. Calcolare $Or(S(\overline{v}), S(\overline{w}))$.

Svolgimento. (i) Osserviamo che

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\overline{v}, \; \overline{w})$$

perciò la coppia ordinata di vettori è una base per $\mathbb{R}^2$ che, inoltre, è orientata positivamente.

(ii) Riflettere rispetto all'asse x_1 vuol dire che, per ogni vettore $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $S(\overline{x}) = (x_1, -x_2)$. Pertanto, l'isometria lineare S è

$$S(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Denotata con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice ortogonale dell'isometria S, $det\ M = -1$ cioè S è un'isometria lineare inversa. Pertanto

$$Or(S(\overline{v}), S(\overline{w})) = det(M)\ Or(\overline{v},\ \overline{w}) = -1,$$

i.e. la base

$$b = \ S(\overline{v}), S(\overline{w})$$

non è equiorientata con e.

Esercizio 5: Determinare tutte le rette passanti per $P = (-1, 2)$ e formanti con l'asse x_1 un angolo convesso pari a $\pi/3$. Determinare i due angoli convessi fra le due rette ottenute.

Svolgimento: Sia $\underline{r} = (l, m)$ un vettore direttore di una delle rette da determinare. Allora:

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\underline{r} \cdot (\pm \underline{e}_1)}{||\underline{r}||\ ||\underline{e}_1||} = \frac{\pm l}{\sqrt{l^2 + m^2}},$$

che determina

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} m.$$

Otteniamo percio', a meno di proporzionalita', due vettori direttori:

$$\underline{r}_1 = (1, \sqrt{3}) \ \text{ e } \ \underline{r}_2 = (-1, \sqrt{3}).$$

Le equazioni cartesiane delle rette cercate sono:

$$r_1 : \ \sqrt{3}x_1 - x_2 + 2 + \sqrt{3} = 0 \ \text{ e } \ r_2 : \ \sqrt{3}x_1 + x_2 - 2 + \sqrt{3} = 0.$$

Ora

$$cos(\theta(r_1, r_2)) = cos(\theta(\pm \underline{r}_1, \underline{r}_2)) = \pm \frac{1}{2},$$

quindi $\theta = \{\pi/3, 2\pi/3\}$.

Esercizio 6: Siano assegnate le rette:

$$\underline{s}_1 : \begin{cases} x_1 = & 1 - 2t \\ x_2 = & 2t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{s}_2 : \ x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \text{ e } \underline{s}_3 : \ 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\underline{s}_1$;
(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta $\underline{r}$ parallela ad $\underline{s}_1$ e passante per $P_0 = \underline{s}_2 \cap \underline{s}_3$;
(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta $\underline{n}$ per $P_1 = \underline{s}_1 \cap \underline{s}_2$ e perpendicolare a $\underline{s}_3$;
(iv) Verificare che la retta per i punti

$$Q_1 = (1, -1/4) \ e \ Q_2 = (2, 1/4)$$

e' parallela a $\underline{s}_2$. Tale retta coincide con $\underline{s}_2$?
Svolgimento: (i) Poiche' $x_2 = 2t$, un' equazione cartesiana e' $x_1 = 1 - x_2$, cioe' $x_1 + x_2 - 1 = 0$.
(ii) Per determinare il punto P_0 basta risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 2x_1 + x_2 - 2 = 0$$

che ha come soluzione

$$x_1 = 3/5, \ x_2 = 4/5.$$

Un vettore direttore della retta $\underline{s}_1$ e' $(-2, 2)$, equivalentemente $(-1, 1)$. Quindi, l'equazione cartesiana della retta che si vuole determinare sara' data da:

$$x_1 + x_2 - \frac{7}{5} = 0.$$

(iii) Per trovare le coordinate di P_1, basta sostituire nell'equazione di $\underline{s}_2$, $x_1 = 1 - 2t$ e $x_2 = 2t$, che determina $t = 1/3$, cioe' $x_1 = 1/3, \ x_2 = 2/3$. Un vettore normale a $\underline{s}_3$ e' $(2, 1)$, come si determina direttamente dalla sua equazione cartesiana. Percio' la retta cercata e' quella che passa per P_1 e che ha parametri direttori $(2, 1)$, cioe':

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 0.$$

(iv) Un vettore direttore della retta per Q_1 e Q_2 e' dato dal vettore $OQ_2 - OQ_1 = (1, 1/2)$. Quindi, un vettore direttore e' anche $(2, 1)$, che e' un vettore direttore anche di

$\underline{s}_2$. Ora pero' la retta per Q_1 e Q_2 e' parallella a $\underline{s}_2$ ma non coincide con $\underline{s}_2$ perche', ad esempio, le coordinate di Q_1 non soddisfano l'equazione di $\underline{s}_2$.

Esercizio 7: Siano assegnati i punti

$$P = (1, 2),\ Q = (2, -1),\ R = (1, 0).$$

(i) Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo $\mathcal{T}$, determinare l'area del triangolo $\mathcal{T}$.
(ii) Scrivere le equazioni delle mediane di $\mathcal{T}$ e delle tre altezze di $\mathcal{T}$.
(iii) Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.
Svolgimento: (i) I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare l'area del triangolo $\mathcal{T}$, basta calcolare con la formula del valore assoluto del determinante diviso per 2 le aree:
a_1 del triangolo con vertici O, P, Q,
a_2 del triangolo con vertici O, P, R ed
a_3 del triangolo con vertici O, R, Q.
L'area cercata sara' data da $a_1 - a_2 - a_3$.
(ii) Una mediana di un triangolo e' ottenuta dalla retta che passa per un vertice del triangolo e per il punto medio del lato del triangolo che e' opposto a tale vertice. Per calcolare ad esempio la mediana uscente da P, basta calcolare la retta per P e per il punto medio del segmento QR, che ha coordinate $(3/2, -1/2)$. Analogamente per le altre mediane.
L'altezza di un triangolo uscente da un suo vertice e' ottenuta considerando la retta passante per il vertice e perpendicolare alla retta congiungente gli altri due vertici. Percio', l'altezza di $\mathcal{T}$ rispetto ad esempio al vertice P e' determinata dalla retta per P e perpendicolare alla retta per i due punti Q e R. Analogamente per le altre altezze.
(iii) Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.

Esercizio 8: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono dati i tre punti non allineati di coordinate, rispetto ad $\mathcal{E}$,:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino tali punti come vertici di un triangolo Λ.
(i) Il punto Q che e' intersezione delle tre altezze del triangolo Λ viene detto l'*ortocentro* del triangolo Λ. Calcolare le coordinate dell'ortocentro di Λ.
(ii) Determinare l'area di Λ.
Svolgimento: (i) Un vettore direttore della retta per P_1 e P_2 e' dato da $P_2 - P_1 = (4, -2)$. Analogamente, un vettore direttore della retta per P_2 e P_3 e' $(-1, 1)$ e per P_1 e P_3 e' $(3, -1)$. Ora dobbiamo considerare, per ogni $1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$, la retta per P_i e perpendicolare alla retta per P_j e P_k. Le equazioni di queste tre rette sono

$$x_1 - x_2 + 3 = 0, \quad 3x_1 - x_2 - 9 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - 3 = 0.$$

Risolvendo il sistema fra due di queste tre rette troviamo il punto di coordinate $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$. Poiche' tale punto appartiene pure alla terza retta, allora queste sono proprio le coordinate dell'ortocentro.
(ii) Il segmento P_1P_2 misura $2\sqrt{5}$. La retta per P_1 e P_2 ha equazioni parametriche

$$x_1 = -1 + 4t, x_2 = 2 - 2t$$

mentre la retta per P_3 e perpendicolare ad essa ha equazioni parametriche

$$x_1 = 2 + 2s, x_2 = 1 + 4s.$$

Il punto di intersezione di tali due rette e' il punto H di coordinate $(9/5, 3/5)$, che corrisponde al punto sulla seconda retta relativo al valore del parametro $s = -1/10$. L'altezza di Λ relativa al cateto P_1P_2 e' quindi il segmento P_3H che misura $\sqrt{5}/5$. Percio', l'area di Λ e' $a(\Lambda) = 1$.