Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2008/2009
II Emisemestre - Settimana 1 - Foglio 9 B
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito di base canonica e, e prodotto scalare standard.
(i) Determinare una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$ costruita a partire dalla base $b := \overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$, dove $\overline{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\overline{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\overline{v}_3 = (0, 1, -1)$.
(ii) Verificare che la matrice cambiamento di base M_{ef} è ortogonale.
Svolgimento: (i) Si procede con il metodo di Gram-Schmidt. Determiniamo il versore $\overline{u}_1$ di $\overline{v}_1$, cioè:

$$\overline{u}_1 = \overline{v}_1/||\overline{v}_1|| = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}).$$

Determiniamo da $\overline{v}_2$ un vettore $\overline{v}'_2$ ortogonale a $\overline{v}_1$, ponendo:

$$\overline{v}'_2 = \overline{v}_2 - \langle \overline{v}_2, \overline{u}_1 \rangle \, \overline{u}_1 = (-1/2, 1, 1/2).$$

In seguito normalizziamo $\overline{v}'_2$, ponendo

$$\overline{u}_2 = \overline{v}'_2/||\overline{v}'_2|| = (-\sqrt{2}/2\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2\sqrt{3}).$$

Definiamo infine un vettore $\overline{v}'_3$, ortogonale a $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$, ponendo

$$\overline{v}'_3 = \overline{v}_3 - (\langle \overline{v}_3, \overline{u}_1 \rangle)\overline{u}_1 - (\langle \overline{v}_3, \overline{u}_2 \rangle)\overline{u}_2 = (1/3, 1/3, -1/3).$$

Normalizzando quest'ultimo vettore, si ha:

$$\overline{u}_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}).$$

Pertanto,

$$f := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3.$$

(ii) La matrice $M = M_{ef}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Calcolando $M\ {}^tM$ e ${}^tMM$ vediamo che ambedue i prodotti danno la matrice I_3. Pertanto M è ortogonale.

Esercizio 2: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1,2),\ Q = (2,-1),\ R = (1,0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga. Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo $\mathcal{T}$, determinare il perimetro del triangolo $\mathcal{T}$.
Svolgimento: I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare il perimetro basta determinare le lunghezze di tutti e tre i lati con la formula della distanza fra due punti e poi sommare.

Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, sia $\mathcal{Q}$ il trapezio di vertici: $(1,1), \quad (6,1), \quad (2,3), \quad (3,3)$.
(i) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la traslazione $T_{\overline{p}}$, dove il vettore $\overline{p} = (0,-1)$;
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione R_π di angolo π attorno all'origine.
Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio $\mathcal{Q}'$ di vertici $(1,0), \quad (6,0), \quad (2,2), \quad (3,2)$.
(ii) $S_0(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(1,-1), \quad (6,-1), \quad (2,-3), \quad (3,-3)$.
(iii) $R_\pi(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1), \quad (-6,-1), \quad (-2,-3), \quad (-3,-3)$.

Esercizio 4: Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$.
(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato $\mathcal{Q}$ in se stesso?
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.
Svolgimento: (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, con k un numero intero.
(ii) $R_{\pi/4}(\mathcal{Q})$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0), \quad (0,\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2},0)$.