1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^2$, munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $u = (-1, 1)$. Determinare tutti i vettori x che sono ortogonali ad u e che hanno norma uguale a 2.

   Svolgimento: $x = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \langle u, x\rangle = x_2 - x_1$; percio' $x = (\alpha, \alpha)$. Inoltre $||x|| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono
$$x = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ oppure } x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, siano dati i vettori:
$$v_1 = (1, 2, -1),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (1, 2, 0).$$

   (a) determinare $||v_1||$, $||v_2||$, il prodotto scalare $\langle v_1, v_2\rangle$ e l'angolo formato da v_2 e v_3;
   (b) determinare il versore di v_1;
   (c) determinare tutti i vettori ortogonali a v_1 e v_2 e tutti i vettori ortogonali a v_3.

   Svolgimento: (a) $||v_1|| = \sqrt{6}$ e $||v_2|| = \sqrt{2}$; per definizione di prodotto scalare standard, si ha che $\langle v_1, v_2\rangle = 1 - 1 = 0$, cioe' i due vettori sono ortogonali. Se infine θ denota l'angolo formato da v_2 e v_3, ricordiamo che
$$cos(\theta) = \langle v_1, v_3\rangle/(||v_2||||v_3||) = 1/\sqrt{10}.$$

   (b) Il versore di v_1 e'
$$u_1 = v_1/||v_1|| = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}).$$

   (c) Un vettore $t = (x, y, z)$ e' ortogonale a v_1 e a v_2 se e solo se
$$\langle t, v_1\rangle = \langle t, v_2\rangle = 0.$$

   Si ottiene cosi' un sistema lineare
$$x + 2y - z = x + z = 0,$$
   da cui si ricava che
$$x = \alpha,\ y = -\alpha,\ z = -\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$
   Percio' il luogo dei vettori cercati e' il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(1, -1, -1)$. Analogamente a prima, un vettore $t = (x, y, z)$ e' ortogonale a v_3 se e solo se $\langle t, v_3\rangle = 0$, che determina l'equazione
$$x + 2y = 0,$$
   da cui si ricava che
$$x = -2\lambda,\ y = \lambda,\ z = \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$
   Percio' i vettori cercati formano un iperpiano di $\mathbf{R}^3$, cioe' un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Tale sottospazio e' generato dai vettori
$$(-2, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1),$$

ottenuti ponendo, rispettivamente, $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$.

3. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, rispetto al prodotto scalare standard, costruita a partire dalla base $B := \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,1,-1)$.

   Svolgimento: Si procede con il metodo di Gram-Schmidt. Determiniamo il versore u_1 di v_1, cioe':
$$u_1 = v_1/||v_1|| = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}).$$
   Determiniamo da v_2 un vettore v_2' ortogonale a v_1, ponendo:
$$v_2' = v_2 - (\langle v_2, u_1\rangle)u_1 = v_2 - (\langle v_2, u_1\rangle/||v_1||^2)v_1 = (-1/2, 1, 1/2).$$
   In seguito normalizziamo v_2', ponendo
$$u_2 = v_2'/||v_2'|| = (-\sqrt{2}/2\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2\sqrt{3}).$$
   Definiamo infine un vettore v_3', ortogonale a u_1 e u_2, ponendo
$$v_3' = v_3 - (\langle v_3, u_1\rangle)u_1 - (\langle v_3, u_2\rangle)u_2 = v_3 - (\langle v_3, u_1\rangle/||v_1||^2)v_1 - (\langle v_3, u_2\rangle/||v_2||^2)v_2 = (1/3, 1/3, -1/3).$$
   Normalizzando quest'ultimo vettore, si ha:
$$u_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}).$$
   La base cercata e'
$$B := \{u_1, u_2, u_3\}.$$

4. Sia $\mathbf{R}^3$ munito di prodotto scalare standard. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = (1,1,1)$ e $w_2 = (0,1,1)$.

   Svolgimento: Poiche' i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, essi formano una base B per un sottospazio vettoriale W di dimensione 2. Poiche' in $\mathbf{R}^3$ si ha $\langle w_1, w_2\rangle = 2 \neq 0$, la base B di W non e' ortonormale. Applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base B, si ottiene una base ortonormale per W dove precisamente i vettori sono
$$u_1 = w_1/||w_1|| = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \text{ e } u_2 = w_2'/||w_2'|| = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$$
   dove $w_2' = w_2 - (\langle w_2, u_1\rangle)u_1$.

5. Sia $\mathbf{R}^5$ munito di prodotto scalare standard. Determinare una base ortonormale del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ cosi' definito:
$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = x_2 + x_4 = 0\}.$$

   Svolgimento: Una base B di U e' data da due autosoluzioni linearmente indipendenti del sistema lineare omogeneo di 3 equazioni che definisce U:
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = x_2 + x_4 = 0.$$

Per esempio, si ha

$$B = \{v_1 = (2, 0, -1, 0, 0),\ v_2 = (0, 2, -1, -2, 0)\}.$$

Applichiamo Gram-Schmidt a tale base, ponendo $u_1 = v_1/||v_1|| = (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}, 0, 0)$, $v_2' = v_2 - (\langle v_2, u_1\rangle)u_1$ e scegliendo come base $\{u_1, u_2\}$ dove $u_2 = v_2'/||v_2'||$.

6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $v_2 = (1, 0, 1)$.

   Svolgimento: Il vettore w, proiezione ortogonale del vettore v_1 sul vettore v_2 e' per definizione il vettore multiplo di v_2 secondo il coefficiente

   $$\langle v_1, v_2\rangle/||v_2||^2.$$

   Poiche' $\langle v_1, v_2\rangle = 1$ e $||v_2|| = \sqrt{2}$, il vettore cercato e' $\pi_{v_2}(v_1) = (1/2, 0, 1/2)$.