Dispense su:
Prodotti scalari e Spazi vettoriali euclidei
Operatori ortogonali ed autoaggiunti
Teorema spettrale di operatori autoaggiunti

Prof. F. Flamini

November 20, 2017

Prodotti scalari e spazi vettoriali euclidei

0.1 Prodotto scalare geometrico

Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori geometrici può essere considerato come un prototipo della nozione più generale di spazio vettoriale. Esattamente la stessa cosa avviene per la nozione generale di *prodotto scalare*, che è storicamente preceduta dall'esempio particolare del prodotto scalare di vettori geometrici. Ricorderemo ora brevemente la definizione ed alcune proprieta' del prodotto scalare di vettori geometrici.

Assegnati due vettori geometrici non nulli $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ indicheremo con

$$\widehat{\mathbf{ab}}$$

il numero reale compreso tra 0 e π che misura l'angolo definito dalle semirette OA e OB , dove il punto O e' l'origine e OA, OB sono segmenti orientati che rappresentano rispettivamente $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Non e' difficile verificare che $\widehat{\mathbf{ab}}$ non dipende dalla scelta del punto O. Se $\mathbf{a}$ oppure $\mathbf{b}$ e' nullo converremo che $\widehat{\mathbf{ab}} = 0$.

Il *coseno dell'angolo compreso tra* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ è il numero reale $\cos(\widehat{\mathbf{ab}})$.

Definizione 0.1.1. *Sia* $\mathbf{V}$ *lo spazio vettoriale dei vettori geometrici e siano* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *due suoi vettori. Il* **prodotto scalare geometrico** *di* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *è il numero reale*

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mid \mathbf{a} \mid\mid \mathbf{b} \mid \cos(\widehat{\mathbf{ab}}).$$

ove $\mid \mathbf{a} \mid$ *denota la lunghezza del segmento orientato* OA *che rappresenta* $\mathbf{a}$*,*

Come vedremo piu' avanti, il *prodotto scalare geometrico* è un esempio particolare di una più generale definizione di **prodotto scalare.**

Poiché $\widehat{\mathbf{aa}}$ è l'angolo nullo, il suo coseno è 1 e quindi

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = \mid a \mid^2 .$$

Il prodotto scalare geometrico ha la seguente interpretazione geometrica: sia $\mathbf{a}$ non nullo allora il vettore

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} \ \mathbf{a}$$

è rappresentato dal segmento orientato OC, dove C è la proiezione perpendicolare del punto B sulla retta OA. La trigonometria ci dice infatti che

$$\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\mid \mathbf{a} \mid}$$

ha come valore assoluto la lunghezza del segmento OC ed è positivo se OC e OA hanno lo stesso verso, negativo in caso contrario. D'altra parte

$$\frac{\mathbf{a}}{\mid \mathbf{a} \mid}$$

è un vettore di lunghezza 1 che è proporzionale ad $\mathbf{a}$ e ne ha lo stesso verso. Utilizzando queste due osservazioni, il lettore potra' comprendere la precedente uguaglianza. Naturalmente $\mathbf{p}$ è proporzionale al vettore $\mathbf{a}$. È utile osservare, in vista di alcune applicazioni successive, che

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$$

è un vettore *perpendicolare* ad $\mathbf{a}$. Ricordiamo che

Definizione 0.1.2. *Due vettori geometrici* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *si dicono* **perpendicolari** *se sono non nulli e hanno direzioni perpendicolari oppure se uno di essi è nullo.*

Da cos $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e dalla definizione segue immediatamente che: $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *sono perpendicolari se, e solo se,*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0.$$

Il prodotto scalare geometrico determina ed è determinato dalla funzione

$$G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R},$$

che ad ogni coppia ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ associa il numero reale

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mid \mathbf{a} \mid\mid \mathbf{b} \mid \;\; cos\; (\widehat{\mathbf{ab}}).$$

Ogni proprieta' del prodotto scalare di vettori geometrici può dunque essere descritta nei termini di una corrispondente proprieta' della funzione G. Esaminiamo da entrambi i punti di vista le proprieta' che ci interessano:

Proprietà commutativa $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$,

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a},$$

ovvero

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = G(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

La proprietà segue subito dalla definizione di prodotto scalare geometrico e dal fatto che $\widehat{\mathbf{ab}} = \widehat{\mathbf{ba}}$.

Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori geometrici $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{c},$$

ovvero

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + G(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Si noti che, essendo valida la proprieta' commutativa, vale anche $G(\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}) = G(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + G(\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

Proprietà di bilinearità $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda \mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet (\lambda \mathbf{b}),$$

ovvero

$$G(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = G(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}).$$

La proprietà segue osservando che $\widehat{(\lambda \mathbf{a})\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{a}(\lambda \mathbf{b})}$ e che $\mid \lambda \mathbf{v} \mid = \mid \lambda \mid \mid \mathbf{v} \mid$, dove $\mid \lambda \mid$ è il valore assoluto del numero reale λ.

(4) *Proprietà di positività* $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} > 0.$$

La proprietà segue dall'uguaglianza $\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = \mid \mathbf{a} \mid^2$.

Un modo conveniente per calcolare un prodotto scalare geometrico consiste nel fissare una base

$$\mathbf{i},\ \mathbf{j}, \mathbf{k}$$

di $\mathbf{V}$ costituita da vettori di lunghezza 1 e a due a due perpendicolari. Questo significa che i tre vettori della base sono rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati OI, OJ, OK, dove i punti O, I, J, K sono vertici di uno stesso cubo e OI, OJ, OK sono lati questo cubo. Poiché i vettori sono a due a due perpendicolari abbiamo

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{i} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0,$$

poiché i vettori considerati hanno lunghezza 1 avremo inoltre

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1.$$

Siano ora $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, per calcolare $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ possiamo calcolare esplicitamente

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \bullet (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}).$$

Applicando la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma, utilizzando le precedenti uguaglianze e svolgendo i calcoli si ottiene che

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \bullet (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Definizione 0.1.3. *Una base ortonormale di* $\mathbf{V}$ *è una base di* $\mathbf{V}$ *costituita da tre vettori* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *che sono a due a due perpendicolari e di lungezza* 1.

Sulla base delle ultime osservazioni svolte possiamo concludere questa sezione con la proprietà seguente:

Proposizione 0.1.1. *Se* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *è una base ortonormale di* $\mathbf{V}$ *e se* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$*, allora il prodotto scalare geometrico* $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$ *è la somma dei prodotti delle coordinate dello stesso indice, i.e.*

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

0.2 Prodotti scalari

La nozione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale qualsiasi è la seguente.

Definizione 0.2.1. *Un* **prodotto scalare** *su uno spazio vettoriale* V *è una funzione*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dotata delle seguenti proprieta:
(1) Proprietà commutativa: $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in V$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$$

(2) Proprietà distributiva rispetto alla somma: $\forall\ \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \underline{y} + \underline{z}, \underline{x} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{z}, \underline{x} \rangle.$$

(3) Proprietà di bilinearità : $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in V$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda\underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \lambda\underline{y} \rangle$$

(4) Positivita': deve valere $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0$ *per ogni* $\underline{x} \neq \underline{0}$ *e* $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0$.

Per quanto riguarda la proprietà distributiva si noti che la seconda parte di tale proprietà segue dalla prima parte e dalla proprietà commutativa. Essa poteva quindi essere anche omessa dalla definizione.

Vediamo qualche esempio di prodotto scalare.

Esempio 0.2.1. *Integrale di un prodotto di polinomi*
Sia $\mathbb{R}[T]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata T e sia

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}$$

la funzione che alla coppia di polinomi $(P(T), Q(T)) = (P, Q) \in \mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T]$ associa l'integrale

$$\int_0^1 PQ\ dT.$$

$\langle\ ,\ y\rangle$ è un esempio di prodotto scalare su $\mathbb{R}[T]$. Poiché $PQ = QP$ è ovvio che la proprietà commutativa è soddisfatta. D'altra parte si ha

$$\langle P, Q_1 + Q_2\rangle = \int_0^1 P(Q_1 + Q_2)\, dT = \int_0^1 PQ_1\, dT + \int_0^1 PQ_2 dT,$$

poiché l'integrale commuta con la somma di funzioni. Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_0^1 \lambda G\, dT = \lambda \int_0^1 G\, dT$$

per ogni funzione G, integrabile tra 0 e 1 e quindi

$$\langle \lambda P, Q\rangle = \lambda\langle P, Q\rangle = \langle P, \lambda Q\rangle.$$

Se infine P è un polinomio *non nullo,* P^2 è non nullo e assume un valore ≥ 0 per ogni numero reale. Inoltre P^2 si annulla soltanto per un numero finito di valori reali che sono le radici di P. Usando tali osservazioni si può provare che

$$\langle P, P\rangle = \int_0^1 P^2 dT > 0,$$

$\forall P \in \mathbb{R}[T]$. Si ha dunque $\langle P, P\rangle \geq 0$ e $\langle P, P\rangle = 0$ se, e solo se, P è il polinomio nullo.

Esempio 0.2.2. *Prodotto scalare standard su* $\mathbb{R}^n$.
Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo la base canonica e e quindi possiamo definire il seguente prodotto scalare

$$\langle\ ,\ \rangle_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Siano $\underline{x} = (x_1, \ldots . x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$; allora $\underline{x} = \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \underline{e}_i$ e $\underline{y} = \sum_{i=1,\ldots,n} y_i \underline{e}_i$, quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_e = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Questo particolare esempio si chiama *prodotto scalare standard* su $\mathbb{R}^n$.

Esempio 0.2.3. *Prodotto scalare determinato da* ${}^tA\,A$.
Sia A una matrice quadrata di ordine n e di rango n; un ulteriore esempio di prodotto scalare si definisce a partire da A nel modo indicato dal seguente

Teorema 0.2.1. *Sia A una matrice quadrata di ordine e di rango n e sia*

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la funzione così definita: qualunque siano $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_q)$

$$F(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_q \end{pmatrix} {}^tAA \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}.$$

Allora $F := \langle , \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. La proprietà distributiva e la bilinearità di F sono di facile verifica con un calcolo diretto, le lasciamo perciò al lettore.
Per verificare la proprietà commutativa si osservi che la matrice prodotto che si trova a destra nell'ultima uguaglianza è uguale alla propria trasposta: semplicemente perché si tratta di una matrice 1×1. D'altra parte la trasposta di tale matrice prodotto è il prodotto in ordine inverso delle matrici trasposte dei fattori e cioè

$$\begin{pmatrix} y_1, \dots, y_n \end{pmatrix} \ {}^tA \ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Poiché tale espressione è $F(\underline{y}, \underline{x})$ ne segue che $F(\underline{x}, \underline{y}) = F(\underline{y}, \underline{x})$. Infine si deve verificare che $F(\underline{x}, \underline{x}) > 0$, per ogni $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ non nullo. Sia

$$(x_1, \dots, x_n)^t A = (y_1, \dots, y_n),$$

passando da questa uguaglianza all'uguaglianza tra matrici trasposte otteniamo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha

$$F(\underline{x}, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \ {}^tA \ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1, \dots, y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Si noti che A ha rango n e che quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo determinato da A è la soluzione nulla. Poiché $\underline{x}$ non è nullo $\underline{x}$ non è una soluzione del sistema e quindi almeno un y_i è diverso da zero. Possiamo dedurre da ciò che $F(\underline{x}, \underline{x}) = \sum y_i^2 > 0$. $\square$

Se $A = I_n$ la costruzione riproduce esattamente il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ dell'esempio precedente. Avremo modo di vedere che *ogni* prodotto scalare su uno spazio vettoriale di dimensione finita può essere definito a partire da una matrice A come la precedente.

0.3 Prodotti scalari e matrici simmetriche

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ una sua base. Assegnato un prodotto scalare

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

su V, possiamo considerare la matrice

$$B_u(\langle \ , \ \rangle)$$

il cui termine di posto i, j è

$$b_{ij} = \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle.$$

Definizione 0.3.1. $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ *è la* **matrice del prodotto scalare** $\langle\ ,\ \rangle$ **rispetto alla base** u.

È chiaro che $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ è una matrice quadrata di ordine n. Si noti inoltre che $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ è una matrice simmetrica. L'importanza della matrice $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ è dovuta alla seguente proprieta':

Proposizione 0.3.1. *Data* $u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ *una base di* V*, si ha*

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} B_u(\langle\ ,\ \rangle) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

qualunque siano i vettori $\underline{x} = x_1\underline{u}_1 + \dots + x_n\underline{u}_n$ *e* $\underline{y} = y_1\underline{u}_1 + \dots + u_n\underline{u}_n$ *di* V*, espressi in coordinate rispetto alla base* u*.*

Dimostrazione. La dimostrazione consiste di applicazioni successive della proprietà distributiva e di linearità. Indicheremo i passi da compiere tralasciando i dettagli. Innanzitutto si ha

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \sum_{j=1,\dots,n} y_j \underline{u}_j \rangle = \sum_{j=1,\dots,n} y_j \langle \underline{x}, \underline{u}_j \rangle.$$

D'altra parte

$$y_j \langle \underline{x}, \underline{u}_j \rangle = y_j \langle \sum_{i=1,\dots,n} x_i \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = y_j \sum_{i=1,\dots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle$$

e quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{j=1,\dots,n} y_j \sum_{i=1,\dots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i y_j b_{ij}.$$

Calcolando infine $\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} B_u(\langle\ ,\ \rangle) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 b_{11} + \dots + x_n b_{n1} & \dots & x_1 b_{1n} + \dots + x_n b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Per concludere basta osservare che

$$\begin{pmatrix} x_1 b_{11} + \dots + x_n b_{n1} & \dots & x_1 b_{1n} + \dots + x_n b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1,\dots,n} x_i y_j b_{ij}.$$

□

Esercizi 0.3.1. (1) Sia $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$ e sia $u = \underline{u}_1, \underline{u}_2$ una delle seguenti basi:
- $\underline{u}_1 = (1, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1)$
- $\underline{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\underline{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$
- $\underline{u}_1 = (1, -1)$, $\underline{u}_2 = (1, -1)$

- $\underline{u}_1 = (1,1)$, $\underline{u}_2 = (0,1)$.
Per ogni base u si determini la matrice $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$.

(2) Siano OA, OB, OC tre segmenti orientati di lunghezza 1 che a due a due formano in O un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Siano poi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i vettori geometrici rappresentati rispettivamente da OA, OB, OC. Si determini la matrice del prodotto scalare geometrico rispetto alla base $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

In definitiva, la matrice $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ permette di calcolare facilmente il prodotto scalare $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ una volta che siano note le coordinate dei vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto alla base u.

0.4 Spazi vettoriali euclidei. Perpendicolarità e basi ortogonali rispetto ad un prodotto scalare

In questo paragrafo, ed in varie occasioni successive, lavoreremo su uno spazio vettoriale V sul quale converrà avere fissato una volta per tutte un prodotto scalare

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

scelto tra gli infiniti prodotti scalari definiti su V. Lavoreremo quindi avendo assegnato la coppia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ e non solo lo spazio vettoriale V.

Definizione 0.4.1. *Uno* **spazio vettoriale euclideo** *è una coppia* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *dove* V *è uno spazio vettoriale e* $\langle\ ,\ \rangle$ *è un prodotto scalare su* V.

Dato $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, vogliamo discutere alcune proprietà geometriche notevoli di tale spazio. Abbiamo bisogno prima di alcuni preliminari.

Norma di un vettore
In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di *lunghezza di vettori*. Infatti abbiamo:

Definizione 0.4.2. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo e sia* $\underline{v} \in V$ *un qualsiasi vettore. La* **norma** *(o* **lunghezza***) di* $\underline{v}$ *è il numero reale non negativo*

$$\| \underline{v} \| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}.$$

Notiamo che, se $V = \mathbb{R}^n$ munito di prodotto scalare standard, date $(y_1, \dots, y_n)$ le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base canonica e, allora

$$\| \underline{v} \| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Versori. Versorizzazione di un vettore

Definizione 0.4.3. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo e sia* $\underline{v} \in V$. *Il vettore* $\underline{v}$ *si dice* **versore***, se*

$$\| \underline{v} \| := 1.$$

Notare che se invece $\underline{v}$ non e' un versore, si puo' sempre considerare un generatore di $Span(\underline{v})$ che sia un versore, i.e.

$$\underline{f} = \frac{\underline{v}}{|| \, \underline{v} \, ||}.$$

La precedente formula si dice, **versorizzazione** del vettore $\underline{v}$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Teorema 0.4.1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Qualunque siano i vettori $\underline{u}, \underline{v} \in V$ si ha*

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 \;\; \leq \;\; || \, \underline{u} \, ||^2 \, || \, \underline{v} \, ||^2 \, .$$

Inoltre vale l' uguaglianza se, e solo se, $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Al variare di t in $\mathbb{R}$ consideriamo il vettore $t\underline{u} + \underline{v}$ ed osserviamo che

$$\langle t\underline{u} + \underline{v}, t\underline{u} + \underline{v} \rangle \;\; \geq \;\; 0$$

in quanto $\langle \; , \; \rangle$ è un prodotto scalare. D'altra parte si calcola facilmente che

$$\langle t\underline{u} + \underline{v}, t\underline{u} + \underline{v} \rangle = at^2 + 2bt + c$$

dove

$$a = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle, \; b = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle, \; c = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle.$$

Se $a = 0$ allora $\underline{u} = \underline{0}$ e la disuguaglianza diventa l'uguaglianza $0 = 0$: in tal caso non c'è altro da dimostrare. Consideriamo allora il caso rimanente e cioè $a > 0$: per il polinomio di secondo grado $at^2 + 2bt + c$ sappiamo che vale

$$at^2 + 2bt + c \geq 0$$

qualunque sia t. Equivalentemente il discriminante $4(b^2 - ac)$ di tale polinomio deve essere ≤ 0. Ma allora abbiamo

$$b^2 - ac = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 - \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \, \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \;\; \leq \;\; 0;$$

utilizzando la definizione di norma, ciò prova la prima parte del teorema.

Si noti infine che l'ultima disuguaglianza è un'uguaglianza se, e solo se, $b^2 - ac = 0$ e cioè se, e solo se, l'equazione $at^2 + 2bt + c = 0$ ha un'unica radice $t_0 = -\frac{b}{a}$. Ciò avviene se, e solo se,

$$\langle t_0\underline{u} + \underline{v}, t_0\underline{u} + \underline{v} \rangle = 0$$

ovvero se, e solo se, $t_0\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$. Essendo $\underline{u} \neq \underline{0}$ la condizione $t_0\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$ equivale alla condizione che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ siano linearmente dipendenti. □

Coseno di angoli convessi.

A partire dalla disuguaglianza di Schwarz, possiamo dare una nozione di **angolo convesso** fra due vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo V, estendendo così quanto considerato nel caso di vettori geometrici (cf. § 0.1). Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori non nulli di V. È immediato verificare che la diseguaglianza di Schwarz è equivalente a:

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq ||\underline{u}||\ ||\underline{v}||. \tag{1}$$

Da (1) segue immediatamente che

$$-1 \leq \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{||\underline{u}||\ ||\underline{v}||} \leq 1, \tag{2}$$

per ogni $\underline{u}$ e $\underline{v}$ come sopra. Grazie al fatto che la funzione coseno e' monotona strettamente decrescente (quindi invertibile) nell'intervallo reale $[0, \pi]$, abbiamo:

Definizione 0.4.4. *Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in uno spazio vettoriale euclideo V, definiamo l'***angolo convesso** *$\theta = \theta(\underline{u}, \underline{v})$ da essi formato quell'unico numero reale $\theta \in [0, \pi]$ tale che*

$$\cos\theta := \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{||\underline{u}||\ ||\underline{v}||}. \tag{3}$$

In altre parole, denotata con

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

la funzione inversa della funzione coseno nell'intervallo in questione, abbiamo che

$$\theta := \arccos(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{||\underline{u}|| \cdot ||\underline{v}||}).$$

Vettori ortogonali.
La nozione di perpendicolarità tra vettori di uno spazio vettoriale euclideo può essere agevolmente introdotta imitando il caso del prodotto scalare geometrico:

Definizione 0.4.5. *Due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ di uno spazio vettoriale euclideo V si dicono* **perpendicolari** *(equivalentemente,* **ortogonali***) se*

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0.$$

Osservazione 0.4.1. Come semplici conseguenze della precedente definizione, ritroviamo che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali se, e solo se, l'angolo convesso da essi formato è $\theta = \pi/2$. Inoltre, da (3), otteniamo una semplice relazione che lega il prodotto scalare tra i due vettori, l'angolo convesso da essi formato e le loro norme:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = ||\underline{u}||\ ||\underline{v}||\ \cos\ \theta(\underline{u}, \underline{v}). \tag{4}$$

Riguardo alla perpendicolarita' di vettori, più in generale vale la seguente

Definizione 0.4.6. *Un sistema di vettori $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ si dice un* **sistema di vettori ortogonali** *se i suoi elementi sono a due a due ortogonali, cioè se*

$$i \neq j\ \Rightarrow\ \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0,\ \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Una **base ortogonale** *è una base di V formata da un sistema di vettori ortogonali.*

I sistemi di vettori ortogonali sono spesso più facili da studiare e più convenienti nelle applicazioni. Si consideri ad esempio la seguente:

Proposizione 0.4.2. *Sia $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ un sistema di vettori ortogonali. Se $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, allora i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{v}_r = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. A tale scopo osserviamo che

$$0 = \langle \underline{v}_i, \underline{0} \rangle = \langle \underline{v}_i, \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{v}_r \rangle = \sum_{j=1,\ldots,r} \lambda_j \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle.$$

D'altra parte $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e quindi

$$0 = \sum_{j=1,\ldots,r} \lambda_j \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \lambda_i \langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle.$$

Infine, essendo $\underline{v}_i \neq \underline{0}$, si ha $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle \neq 0$ e quindi $\lambda_i = 0$, $(i = 1, \ldots, r)$. □

Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Il problema che vogliamo affrontare è quello di costruire una base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo. Il procedimento di Gram-Schmidt è un algoritmo che permette, in particolare, di risolvere tale problema.

Lemma 0.4.3. *Sia $w = \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$ un sistema ortogonale di vettori non nulli di V e sia $S = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v})$. Allora il vettore*

$$\underline{n} = \underline{v} - \sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i$$

è perpendicolare ai vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$ e inoltre $S = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{n})$.

Dimostrazione. Sia $\underline{w}_j$ uno dei vettori di w, per $i \neq j$ si ha $\langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = 0$ e quindi

$$\sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = -\langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle.$$

Ciò implica $\langle \underline{n}, \underline{w}_j \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle - \langle \underline{v}, \underline{w}_j \rangle = 0$ e pertanto $\underline{n}$ è ortogonale ad ogni $\underline{w}_j$. Per provare la seconda parte dell'enunciato osserviamo innanzitutto che

$$Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{n}) \subseteq S.$$

Ogni vettore $\underline{u} = u_1 \underline{w}_1 + \cdots + u_s \underline{w}_s + u_{s+1} \underline{n}$ di $Span(\underline{n}, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s)$ è infatti anche un vettore di S: per verificarlo basta sostituire, in quest'ultima combinazione lineare, $\underline{n}$ con la sua espressione come combinazione lineare di $\underline{v}$ $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$ data nell'enunciato. Nello stesso modo si prova che

$S \subseteq Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v})$. Infatti $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{n}, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$, come si evince subito dall'enunciato. Sia allora $\underline{t} = t_1\underline{w}_1 + \cdots + t_s\underline{w}_s + t_{s+1}\underline{v} \in S$, sostituendo $\underline{v}$ con la sua espressione come combinazione lineare di $\underline{n}$ $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$, segue che $\underline{t}$ è combinazione lineare di $\underline{n}, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$. Perciò $t \in Span(\underline{n}, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s)$ e vale la precedente inclusione. $\square$

Per rendere piu familiare la formula che appare nell'enunciato del precedente lemma, il lettore osservi che per due vettori $\underline{v}, \underline{w}$ si ha

$$\underline{n} = \underline{v} - \frac{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle}{\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle}\underline{w}.$$

La formula generale che appare nell'enunciato del lemma viene utilizzata, nella dimostrazione del successivo teorema, per costruire un sistema di vettori ortogonali che generi lo stesso spazio generato da un sistema di vettori assegnato. Tale costruzione è nota come *procedimento di Gram-Schmidt.*

Teorema 0.4.4. *Sia $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ un sistema di vettori non tutti nulli di uno spazio vettoriale euclideo e sia $S = Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$. Allora esiste una base ortogonale $w = \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$ di S.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n: se $n = 1$ $\underline{v}_1$ è non nullo ed è una base di S. Una base formata da un solo vettore è sempre ortogonale quindi $\underline{v}_1$ è una base ortogonale di S. Sia ora $n > 1$, consideriamo i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}$ ed il sottospazio T da essi generato. Per ipotesi induttiva esiste una base ortogonale

$$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$$

del sottospazio T. Si noti che $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$ e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}$ generano lo stesso spazio. Quindi anche i sistemi di vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$ $\underline{v}_n$ e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}$ $\underline{v}_n$ generano lo stesso spazio e percio'

$$S = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t, \underline{v}_n).$$

Per Lemma 0.4.3, il vettore

$$\underline{w}_{t+1} = \underline{v}_n - \sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle}\underline{w}_i$$

è ortogonale a $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$ e $S = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{t+1})$. Se $\underline{w}_{t+1} = \underline{0}$ allora $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_t$ è una base ortogonale di S. Se $\underline{w}_{t+1} \neq \underline{0}$ allora i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{t+1}$ sono non nulli ed a due a due perpendicolari. Per Proposizione 0.4.2, essi sono linearmente indipendenti. Quindi sono una base ortogoale di S. $\square$

La cosa importante è applicare la dimostrazione, o il lemma che la precede, in modo concreto tutte le volte che sia assegnato un sistema di vettori

$$v \;=\; \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n.$$

Supporremo non tutti nulli i vettori di v e, a meno di riassegnare gli indici, $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$. Indichiamo i passi da compiere:

(1) Porre $\underline{w}_1 = \underline{v}_1$.

(2) Porre $\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{w}_1, \underline{v}_2 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1$.

$\vdots$

(k) Porre

$$\underline{w}_k = \underline{v}_k - \sum_{i=1,\dots,k-1,\ \underline{w}_i \neq \underline{0}} \frac{\langle \underline{w}_i, \underline{v}_k \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i$$

$\vdots$

(n) Dopo n passi il procedimento termina avendo costruito un sistema di vettori

$$w = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n.$$

Si noti che, per ogni $k = 1, \dots, n$, la costruzione è tale che

$$Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = Span(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k).$$

Ciò segue immediatamente dalla dimostrazione del precedente teorema. I vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ generano dunque $Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e sono inoltre, per come sono stati costruiti, a due a due perpendicolari. Non è escluso che alcuni dei vettori costruiti possano essere nulli, infine:

eliminando da w i vettori nulli si ottiene una base ortogonale di $Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$.

Sottospazio ortogonale

Definizione 0.4.7. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $S \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. L'insieme*

$$S^\perp := \{\underline{v} \in V \ \mid \ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0, \ \forall\, \underline{u} \in S\}$$

è un sottospazio vettoriale di V detto **sottospazio ortogonale** *a S.*

In altri termini, anche se S è solo un sottoinsieme, $S^\perp$ ha sempre una struttura di sottospazio vettoriale di V. Se in particolare $S = \{\underline{u}\}$, per qualche $\underline{u} \in V$, allora scriveremo $\underline{u}^\perp$ invece di $\{\underline{u}\}^\perp$; in particolare, vale

$$\underline{u}^\perp = Span(\underline{u})^\perp.$$

È facile verificare che, se $S \subset V$ è anch'esso un sottospazio vettoriale, allora $S \cap S^\perp = \{\underline{0}\}$. Inoltre, se $u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ è una base per S, risulta

$$S^\perp = \underline{u}_1^\perp \cap \dots \cap \underline{u}_n^\perp.$$

Proposizione 0.4.5. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia $S \subset V$ un sottospazio vettoriale s dimensionale di V. Allora,*

$$V = S \oplus S^\perp.$$

In particolare, $dim\ S^\perp = n - s$.

Dimostrazione. Sia $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_s$ una base per S. A meno di applicare Teorema 0.4.4, possiamo supporre che u sia una base ortogonale. Dal Teorema di estensione ad una base e dal Teorema 0.4.4, u si estende ad una base ortogonale $v = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_s, \underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n$ per V. Per definizione di base ortogonale, $\underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n \in S^{\perp}$. Pertanto, $V = S + S^{\perp}$ ed i vettori $\underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n \in S^{\perp}$ sono linearmente indipendenti in $S^{\perp}$ perché lo sono in V. Da quanto osservato precedentemente, poiché si ha $S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\}$, allora $V = S \oplus S^{\perp}$ ed il sistema di vettori linearmente indipendenti $w = \underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n$ è una base per $S^{\perp}$. □

Definizione 0.4.8. *Dato S un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V, $S^{\perp}$ viene detto il* **complemento (o supplemento) ortogonale** *di S.*

0.5 Basi ortonormali e matrici ortogonali

Nel seguito useremo il **simbolo di Kronecker** δ_{ij} per indicare il termine di posto i, j della matrice identità di ordine assegnato; questo vuol dire che $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e che $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$.

Definizione 0.5.1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Diremo che una base $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è* **ortonormale** *se*

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Si noti che una base ortonormale $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è certamente una base ortogonale, segue infatti dalla definizione che $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. La proprietà in più che caratterizza le basi ortonormali tra tutte le basi ortogonali è che

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = 1, \ i = 1, \ldots, n,$$

i.e. che ogni vettore $\underline{v}_i$ e' un versore per ogni $i = 1, \ldots, n$.

• Sia $\mathbf{V}$ lo spazio dei vettori geometrici e siano OI, OJ, OK tre segmenti orientati che coincidono con i tre lati di un cubo di vertice nel punto O. Allora le classi di equipollenza $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di OI, OJ, OK sono un esempio di base ortonormale di $\mathbf{V}$ per il prodotto scalare geometrico.

• È inoltre facile verificare che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n; per costruire una **base ortonormale** di V è sufficiente costruire una **base ortogonale**

$$w = \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$$

di V con il procedimento di Gram-Schmidt. Infatti, una volta costruita una base ortogonale w come sopra, e' sufficiente **versorizzare** i vettori di w ponendo, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$\underline{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle}} \underline{w}_i$$

ottenendo cosi' una base ortonormale

$$u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$$

dedotta da w. Abbiamo infatti gia' osservato che

$$\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle}\sqrt{\langle \underline{w}_j, \underline{w}_j \rangle}} \langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

In particolare i vettori $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ sono non nulli, a due a due perpendicolari e tali che $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle = 1$. Le prime due proprietà implicano che tali vettori sono linearmente indipendenti. Quindi, essendo in numero uguale alla dimensione di V, essi formano una base ortogonale. L'ultima proprietà ci dice che tale base è ortonormale.

Sia $v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ una base di V e sia

$$B_v := B_v(\langle\ ,\ \rangle)$$

la matrice del prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto alla base v. Poiché il termine di posto i, j di B_v è il prodotto scalare $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$ è chiaro che:

Proposizione 0.5.1. *v è una base ortonormale se, e solo se, B_v è la matrice identità.*

Una buona proprietà delle basi ortonormali è la seguente: siano $\underline{x}, \underline{y} \in V$ due vettori e sia

$$u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$$

una base ortonormale di V e sia $B_u := B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ la matrice del prodotto scalare rispetto aalla base u. Allora sappiamo che:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} B_u \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Poiché u è per ipotesi ortonormale, si ha che B_u è la matrice identità I_n quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1,\dots,n} x_i y_i.$$

La precedente proprietà viene spesso riassunta a parole nel modo seguente:

(P1) *Se u è una base ortonormale il prodotto scalare $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ è la somma dei prodotti delle coordinate omonime di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto a u.*

In (P1) la terminologia "coordinate omonime" vuol dire coordinate di $\underline{x}$ e di $\underline{y}$ aventi indice uguale e cioè x_i e y_i, $1 \leq i \leq n$.

Una ulteriore buona proprietà di una base ortonormale è che le coordinate di un vettore $\underline{v} \in V$ sono determinate dal prodotto scalare:

Proposizione 0.5.2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ una sua base ortonormale. Per ogni vettore $\underline{v} \in V$ la componente j-esima di $\underline{v}$ rispetto alla base u è il prodotto scalare*

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle.$$

Dimostrazione. Sia $\underline{v} = x_1\underline{u}_1 + \cdots + x_n\underline{u}_n$. Per provare la proprieta' basta osservare che

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle = \langle \sum_{i=1,\ldots,n} x_i\underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \delta_{ij} = x_j.$$

$\square$

Assegnate due basi ortonormali

$$u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$$

e

$$v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$$

di V, le matrici

$$M_{uv} \ \text{ e } \ M_{vu},$$

rispettivamente, del cambiamento di base da u a v e da v ad u hanno un'importanza particolare.

Definizione 0.5.2. *Una matrice quadrata M si dice* **ortogonale** *se*

$$^tMM = I_n.$$

Equivalentemente M è una matrice ortogonale se, e solo se, M è invertibile e l'inversa di M coincide la trasposta di M:

$$M^{-1} = {}^tM.$$

Dal Teorema di Binet e dal fatto che $^tMM = I_n$, si ottiene che, se M e' una matrice ortogonale allora

$$\det(M) = \pm 1.$$

Definizione 0.5.3. *Una matrice ortogonale M si dice* **speciale ortogonale** *se*

$$\det(M) = 1,$$

si dice invece **ortogonale non-speciale** *se*

$$\det(M) = -1.$$

Perché interessarsi alle matrici ortogonali? Il fatto e' che le matrici ortogonali sono, come vedremo tra poco, esattamente le matrici del cambiamento di base tra due basi ortonormali.

Teorema 0.5.3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano u e v due sue basi qualsiasi. Sia poi $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V e siano $B_u := B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ e $B_v := B_v(\langle\ ,\ \rangle)$ rispettivamente le matrici di tale prodotto scalare rispetto alle basi u e v. Allora la relazione tra le matrici B_u e B_v dei prodotti scalari in queste due basi è la seguente:*

$$B_v = {}^tM_{uv}B_uM_{uv}, \tag{5}$$

dove M_{uv} è la matrice del cambiamento di base da u a v.

Dimostrazione. Siano $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n,\ v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e siano assegnati due vettori qualsiasi

$$\underline{x} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n \quad e \quad \underline{y} = y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n,$$

espressi mediante le loro coordinate rispetto alla base v. Dalla formula del cambiamento di coordinate, le colonne delle coordinate di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto alla base u sono, rispettivamente,

$$M_{uv}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{uv}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi inoltre che la trasposta del primo prodotto è

$$\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}\ {}^tM_{uv}.$$

Poiché B_u è la matrice di $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto alla base u, ne segue che in base u si ha:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}\ {}^tM_{uv}B_uM_{uv}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Poiché la precedente eguaglianza vale qualunque siano i vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$, possiamo dedurre che

$$B_v = {}^tM_{uv}B_uM_{uv}.$$

Si osservi infatti che le coordinate di $\underline{v}_i$ (rispettivamente, di $\underline{v}_j$) rispetto a v sono nulle salvo quella i-esima (rispettivamente, la j-esima), che vale 1. La penultima eguaglianza implica allora

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 \ldots 1_i \ldots 0 \end{pmatrix}\ {}^tM_{uv}B_uM_{uv}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'espressione a destra di quest'ultima uguaglianza è esattamente il termine di posto i, j della matrice prodotto

$${}^t\ M_{uv}B_uM_{uv}.$$

D'altra parte B_v è, per definizione di matrice associata ad un prodotto scalare rispetto ad una base, esattamente la matrice il cui termine di posto i, j è $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$. Per ogni i, j, ${}^t M_{uv} B_u M_{uv}$ e B_v hanno dunque lo stesso termine i, j. Quindi sono matrici uguali. $\square$

La relazione (5) tra le matrici B_u e B_v è molto importante e svolgerà un ruolo fondamentale anche in altri argomenti che affronteremo in seguito (cf. e.g. Capitolo 0.9). Abbiamo infatti la seguente situazione più generale:

Definizione 0.5.4. *Due matrici A e B, $n \times n$, si dicono* **congruenti** *se esiste una matrice invertibile M, $n \times n$, tale che valga*

$$B = {}^t MAM. \tag{6}$$

Se A è B soddisfano la relazione (6)*, esse si dicono congruenti per mezzo di M.*

Da Teorema 0.5.3 abbiamo quindi che, dato uno spazio vettoriale euclideo V, *le matrici di un prodotto scalare rispetto a due qualsiasi basi di V sono congruenti*.

Nelle stesse notazioni di Definizione 0.5.4, abbiamo inoltre:

Lemma 0.5.4. *Sia M una matrice ortogonale $n \times n$. Allora, per ogni matrice A $n \times n$, si ha la seguente identità:*

$$M^{-1}AM = {}^t MAM. \tag{7}$$

In particolare, se M e' ortogonale, due matici A e B sono simili (o coniugate) se e solo se sono congruenti.

Dimostrazione. Discende dal fatto immediato che, essendo M ortogonale, allora ${}^t M = M^{-1}$. $\square$

Pertanto, se su uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ prendiamo due basi ortonormali (rispetto a $\langle , \rangle$) si ha:

Teorema 0.5.5. *Sia V uno spazio vettoriale e siano u e v due sue basi ortonormali rispetto ad uno stesso prodotto scalare $\langle \ , \ \rangle$ su V. Allora la matrice del cambiamento di base M_{uv} è una matrice ortogonale.*

Dimostrazione. Siano $B_u := B_u(\langle , \rangle)$ e $B_v := B_v(\langle , \rangle)$ rispettivamente le matrici del prodotto scalare considerato rispetto alle basi u e v. Poiché u e v sono ortonormali si ha che $B_u = I_n = B_v$. Applicando (5), segue allora che

$$I_n = {}^t M_{uv} I_n M_{uv} = {}^t M_{uv} M_{uv}.$$

In altri termini $M_{uv}^{-1} = {}^t M_{uv}$, quindi M_{uv} è una matrice ortogonale. $\square$

Proiettori ortogonali su sottospazi

Quanto osservato precedentemente, permette di dare ulteriori importanti definizioni.

Definizione 0.5.5. *Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in uno spazio vettoriale euclideo V, definiamo la* **proiezione ortogonale** *di $\underline{u}$ lungo la direzione determinata da $\underline{v}$ (i.e. sul sottospazio $Span(\underline{v})$) il vettore*

$$\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$$

definito dalla condizione

$$\langle \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}), \underline{v} \rangle = 0. \tag{8}$$

L'applicazione lineare $\pi_{\underline{v}}$ sopra definita si chiama **proiettore ortogonale** *sul sottospazio $Span(\underline{v})$.*

Ovviamente se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente dipendenti, allora chiaramente $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \underline{u}$. Pertanto, la precedente definizione è di interessante utilizzo principalmente quando $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti. Utilizzando (3) e (4), abbiamo il seguente semplice risultato.

Proposizione 0.5.6. *Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$, linearmente indipendenti, in uno spazio vettoriale euclideo V, allora:*

(i) $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \lambda_{\underline{u}}\, \underline{v}$, *dove*

$$\lambda_{\underline{u}} := \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{||\underline{v}||^2} = \frac{||\underline{u}||}{||\underline{v}||} \cos\theta(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbb{R}; \tag{9}$$

(ii) la proiezione ortogonale (8) *determina una decomposizione ortogonale del vettore $\underline{u}$ in un vettore parallelo a $\underline{v}$, i.e. $\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$ come in (i), e di un vettore perpendicolare a $\underline{v}$, i.e. $\underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}) := \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \underline{u} - \lambda_{\underline{u}}\, \underline{v}$. In altri termini, $\underline{u}$ si esprime in modo unico come*

$$\underline{u} = \pi_{\underline{v}}(\underline{u}) + \underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}),$$

con $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) \in Span(\underline{v})$ e $\underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}) \in Span(\underline{v})^{\perp}$.

È chiaro che si può definire, vicendevolmente, la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{u}$.

Dimostrazione di Proposizione 0.5.6. (i) Per definizione di proiezione ortogonale su $\underline{v}$, il vettore $\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$ dovrà appartenere a $Span(\underline{v})$. In tal caso esiste, ed è univocamente determinato, uno scalare non nullo $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \lambda\, \underline{v}$. Vogliamo determinare tale λ in funzione di $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Per fare questo, utilizziamo (8):

$$0 = \langle \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \lambda ||\underline{v}||^2,$$

che fornisce la prima eguaglianza in (9). La seconda eguaglianza è chiaramente conseguenza della prima e di (4).
(ii) È ovvia conseguenza di (i) e di (8). $\square$

Più in generale, sia U un sottospazio vettoriale di V. Da Proposizione 0.4.5, si ha la decomposizione ortogonale

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

dove $U^{\perp}$ è il complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ fissato su V (cf. Definizione 0.4.8). Poiche' la somma e' diretta, ogni vettore $\underline{v} \in V$ si scrive in modo unico come

$$\underline{v} = \underline{v}_U + \underline{v}_{U^{\perp}}, \quad \text{con} \ \ \underline{v}_U \in U, \ \underline{v}_{U^{\perp}} \in U^{\perp}; \tag{10}$$

in particolare, poiché la decomposizione è ortogonale, vale anche

$$||\underline{v}||^2 = ||\underline{v}_U||^2 + ||\underline{v}_{U^{\perp}}||^2.$$

Definizione 0.5.6. *Dato un vettore $\underline{v}$ ed un sottospazio vettoriale U non nulli in uno spazio vettoriale euclideo V, definiamo le proiezioni ortogonali di $\underline{v}$ sui sottospazi U e $U^{\perp}$, rispettivamente, i vettori*

$$\pi_U(\underline{v}) := \underline{v}_U \ \ \text{e} \ \ \pi_{U^{\perp}}(\underline{v}) := \underline{v}_{U^{\perp}}$$

come in (10).

Proposizione 0.5.7. *Siano U e $\underline{v}$ come sopra. Sia $dim\ U = k < n = dim(V)$. Sia $u = \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$ una qualsiasi base ortogonale per U. La proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su U è il vettore*

$$\pi_U(\underline{v}) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_1\rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1\rangle}\underline{u}_1 + \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_2\rangle}{\langle \underline{u}_2, \underline{u}_2\rangle}\underline{u}_2 + \ldots + \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_k\rangle}{\langle \underline{u}_k, \underline{u}_k\rangle}\underline{u}_k. \tag{11}$$

Equivalentemente, $\pi_U(\underline{v})$ è il vettore la cui i-esima componente rispetto alla base u di U è:

$$\frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_i\rangle}{\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i\rangle}, \ \ 1 \leq i \leq k.$$

In modo analogo, da (10), la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $U^{\perp}$ sarà data da $\underline{v} - \pi_U(\underline{v})$. Notiamo inoltre che, nel caso in cui u sia una base ortonormale, per $\pi_U(\underline{v})$ ritroviamo quanto dimostrato in Proposizione 0.5.2.

Dimostrazione di Proposizione 0.5.7. Per il teorema di completamento ad una base ed il procedimento di Gram-Schmidt, troviamo una base

$$v = \ \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k, \underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n$$

di V che è ortogonale e che completa la base data di U; in particolare, $u' := \ \underline{u}_{k+1}, \underline{u}_{k+2}, \dots, \underline{u}_n$ è una base ortogonale per $U^{\perp}$. Rispetto a tale base di V, ragionando come in Proposizioni 0.5.2 e 0.5.6-(i), la i-esima coordinata di $\underline{v}$ rispetto alla base u è data da

$$\frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_i\rangle}{\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i\rangle}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Pertanto, per l'unicità della decomposizione (10), abbiamo l'asserto. $\square$

Concludiamo il presente capitolo con testi di alcuni esercizi proposti.

Testi di esercizi riepilogativi 0.1. *(1) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di base canonica e e di prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\underline{u} = (-1, 1)$ espresso nelle sue coordinate rispetto ad e. Determinare tutti i vettori $\underline{x}$ che sono ortogonali ad $\underline{u}$ e con norma uguale a* 2.

(2) Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito di prodotto scalare standard e di base canonica e. Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare $x + y + 2z = x - y + z = 0$.
(i) Giustificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare una base ortonormale di U.
(iii) Denotato con $U^\perp$ il complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^3$, determinare un'equazione lineare in x, y e z che rappresenti $U^\perp$.
(iv) Utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, estendere la base ortonormale di U determinata nel punto (ii) ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(3) Sia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ definita da: $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$, $F(\underline{x}, \underline{y}) := 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$, dove $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2)$ denotano le coordinate dei vettori dati rispetto alla base canonica e.
(i) Verificare che F è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e determinare la matrice $B_e(F)$ di F in base e.
(ii) Considerata la base b data dai vettori $\underline{v}_1 := \underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{v}_2 := 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice $B_b(F)$ di F in base b.

(4) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, siano dati i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\underline{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\underline{v}_3 = (1, 2, 0)$ espressi rispetto alla base canonica e.
(i) Determinare $||\underline{v}_1||$, il prodotto scalare $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$ ed il coseno dell'angolo formato da $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$.

(5) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $\underline{v}_2 = (1, 0, 1)$, dove ambedue i vettori sono espressi rispetto alla base canonica e.

(6) Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito di base canonica e e prodotto scalare standard.
(i) Determinare una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$ costruita a partire dalla base $b := \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$, dove $\underline{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\underline{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\underline{v}_3 = (0, 1, -1)$.
(ii) Verificare che la matrice cambiamento di base M_{ef} è ortogonale.

(7) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v} = (0, 1, 2)$ sul sottospazio W generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{v}_2 = (0, 0, 1)$.

Matrici ed operatori ortogonali. Orientazione in uno spazio vettoriale

In questo capitolo studiamo alcune proprietà fondamentali delle matrici ortogonali su uno spazio vettoriale euclideo V. Assoceremo a tali matrici degli opportuni operatori lineari su V, detti *operatori ortogonali*. Considereremo poi esempi concreti di operatori ortogonali negli spazi vettoriali euclidei $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, muniti di prodotto scalare standard, che hanno importanti risvolti dal punto di vista della geometria euclidea.
Come in § 0.4, per tutto il capitolo sarà notazionalmente più conveniente considerare la n-upla di coordinate di un vettore rispetto ad una base data come una matrice colonna.

0.6 Operatori e matrici ortogonali

Definizione 0.6.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia F un operatore lineare su V. F si dice operatore ortogonale (rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$) se, per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in V$, vale:*

$$\langle F(\underline{x}), F(\underline{y})\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle. \tag{12}$$

Proposizione 0.6.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Un operatore F è ortogonale se, e solo se, è un operatore invertibile (i.e. esiste l'inverso F^{-1}) e se, in ciascuna base ortonormale f di V, la matrice rappresentativa $B := M_f(F)$ di F è una matrice ortogonale, i.e. $B^{-1} = {}^tB$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Sia f una qualsiasi base ortonormale di V e sia $B = M_f(F)$. Poiché la nozione di rango di una matrice è indipendente dalla scelta di una base, per dimostrare contemporaneamente che F è invertibile e che B è ortogonale basta verificare che ${}^tBB = I_n$, cioè che per ogni $\underline{x} \in V$, si ha ${}^tB(B(\underline{x})) = \underline{x}$.
Siano $\underline{x}$ e $\underline{y}$ due vettori arbitrari di V. Visto che F è ortogonale, abbiamo $\langle F(\underline{x}), F(\underline{y})\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$.
Ora, rispetto alla base f, supponiamo di avere coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$. Poiché f è per ipotesi ortonormale, la matrice del prodotto scalare $B_f(\langle\ ,\ \rangle)$ è la matrice identità (cf.

Proposizione 0.5.1). Pertanto, in base f, $\langle F(x), F(y)\rangle = (x_1 \dots x_n)\ {}^tBI_nB \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$. Poiché, per ipotesi, quest'ultimo deve essere uguale a $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = (x_1 \dots x_n)I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$, per ogni scelta di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in V, otteniamo l'identità tra matrici ${}^tBB = I_n$.

$\Leftarrow$) F è per ipotesi invertibile. Sia f una qualsiasi base ortonormale di V e sia $B = M_f(F)$. La matrice di F^{-1} in base f è quindi $B^{-1} = {}^tB$, per le ipotesi su B. Per ogni $\underline{x}$ e $\underline{y}$ in V, con coordinate rispetto a f come nel punto precedente, dalle ipotesi su F e su B si ha $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = (x_1 \dots x_n)I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)\ {}^tBB \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \langle F(\underline{x}), F(\underline{y})\rangle$, cioè F è ortogonale. □

Notiamo inoltre

Corollario 0.6.2. *Date due matrici A e B, $n \times n$, esse sono congruenti per mezzo di una matrice ortogonale M, $n \times n$, se e solo se sono simili per mezzo di M.*

Dimostrazione. Discende direttamente da Lemma 0.5.4 e dalle nozioni di congruenza (cf. Definizione 0.5.4) e di matrici simili o coniugate. □

Osservazione 0.6.1. (a) Dalla condizione (12), osserviamo che un operatore ortogonale conserva il prodotto scalare tra vettori. Quindi conserva la norma di un vettore e conserva l'angolo convesso tra due vettori non nulli. In particolare, un operatore ortogonale trasforma basi ortonormali in basi ortonormali (cf. Teorema 0.5.5).

(b) Se un operatore ortogonale ha autovalori reali, allora essi sono solamente ± 1. Infatti, sia λ un autovalore reale di F e sia $\underline{x}$ un relativo autovettore, i.e. $F(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$. Allora, poiché da (a) abbiamo $||F(\underline{x})|| = ||\lambda\underline{x}|| = |\lambda| ||\underline{x}|| = ||\underline{x}||$, si ha che $|\lambda| = 1$.

(c) Tuttavia, possono esistere operatori ortogonali che non hanno mai autovalori reali (e pertanto sono sicuramente non diagonalizzabili). Ad esempio, prendiamo $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare standard e fissiamo la base canonica e come base di riferimento. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Essa è ortogonale: oltre alla verifica diretta, nei prossimi paragrafi troveremo che A rappresenta, in base e, la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno all'origine di $\mathbb{R}^2$. Per Proposizione 0.6.1, A definisce un operatore ortogonale $F = F_A$ su $\mathbb{R}^2$. Però tale operatore F è privo di autovalori reali, infatti il polinomio caratteristico di A e' $P_A(T) = T^2 + 1$ che non ha soluzioni reali.

0.7 Orientazione di spazi vettoriali

In questo paragrafo introduciamo la nozione di *orientazione* di un sistema di n vettori in uno spazio vettoriale V di dimensione $n \geq 2$. Supponiamo fissata, una volta per tutte, su V una base e. Siano dati n vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n$ non nulli in V.

Definizione 0.7.1. *Con notazioni come sopra si definisce l'orientazione del sistema ordinato di vettori $v = \ \underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n$ rispetto alla base e, denotata con $Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n)$, il segno del determinante della matrice A, $n \times n$, delle coordinate di v rispetto ad e.*

In altre parole, se supponiamo che le coordinate di $\underline{v}_i$ rispetto alla base e sono

$$\underline{v}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \ \ 1 \leq i \leq n, \tag{13}$$

allora:
(i) $Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n) = 0$, se v non è una base;

(ii) se invece v è una base, la matrice $A := (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, ha per i-esima colonna le coordinate di $\underline{v}_i$ come in (13). Pertanto essa non è altro che la matrice cambiamento di base M_{ev}. Denotato con

$$\epsilon_A := \frac{det\ A}{|det\ A|} = \pm 1$$

il segno del determinante di A, allora

$$Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n) = \epsilon_A. \tag{14}$$

Notiamo che l'orientazione di e (rispetto ad e) è $Or(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n) = 1$, dato che in tal caso $A = I_n$. Notiamo inoltre che l'orientazione di una qualsiasi base dipende strettamente dall'ordine scelto dei vettori della base. Ad esempio, se $v = \ \underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n$ è una qualsiasi base per V, si ha

$$Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_j, \ldots,\ \underline{v}_n) = -\ Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_i, \ldots,\ \underline{v}_n)$$

per ciascun $1 \leq i \neq j \leq n$. Pertanto, ogni volta che scambiamo di posto a due vettori della base, bisogna moltiplicare per -1 il precedente valore di orientazione.

In particolare, abbiamo anche:

Definizione 0.7.2. *Sia $v = \ \underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n$ una base per V. Se $Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n)$ è uguale a:*

(i) 1, la base v si dirà orientata positivamente (od equiorientata con la base e);

(ii) -1, la base v si dirà orientata negativamente (o non equiorientata con la base e);

Date ora due basi v e w di V, se sia v che w sono (rispettivamente, non sono) equiorientata con e, allora diremo che v e w sono *equiorientate* fra loro. In effetti, questa definizione è naturale dato che è compatibile con il fatto che, in tale situazione, si ha:

$$M_{vw} = M_{ve}\, M_{ew}.$$

Pertanto, dal Teorema di Binet,

$$det\ M_{vw} = (det\ M_{ve})(det\ M_{ew}) = \frac{det\ M_{ew}}{det\ M_{ev}},$$

che è sempre positivo. In definitiva, l'*equiorientazione di basi* è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{B}_V$ delle basi di V. Precisamente, V possiede esattamente due orientazioni, cioè $\mathcal{B}_V$ è ripartito in due insiemi disgiunti $\mathcal{B}_V^+$, contenente tutte le basi equiorientate con e, e $\mathcal{B}_V^-$, contenente tutte quelle non equiorientate con e. Per ogni coppia di basi v e w prese in $\mathcal{B}_V^+$ (rispettivamente, $\mathcal{B}_V^-$) esse sono equiorientate fra loro.

Esempio 0.7.1. Nei capitoli successivi, utilizzeremo queste nozioni principalmente nel caso $V = \mathbb{R}^n$ ed e la base canonica. Se ad esempio $v = \underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n$ è una qualsiasi base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, rispetto al prodotto scalare standard, se $A = M_{ev}$ allora

$$Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n) = det\ A$$

dato che in tal caso A è una matrice ortogonale, quindi il suo determinante è ± 1. Il fatto che v stia in $\mathcal{B}^+_{\mathbb{R}^n}$ o meno dipenderà dal fatto che A sia una matrice ortogonale speciale o meno (cf. Definizione 0.5.3).

Vediamo ora come varia la proprietà di orientazione rispetto alla base e quando applichiamo delle trasfromazioni lineari ai vettori della base v. Il seguente risultato è immediata conseguenza del Teorema di Binet e di Definizione 0.7.1.

Proposizione 0.7.1. *Siano V, e e v come sopra. Sia B una qualsiasi matrice $n \times n$ invertibile. Allora, detto $\epsilon_B = \frac{det\ B}{|det\ B|} = \pm 1$ il segno del determinante di B, si ha:*

$$Or(B\underline{v}_1,\ B\underline{v}_2, \ldots,\ B\underline{v}_n) = \epsilon_B\ Or(\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \ldots,\ \underline{v}_n).$$

Il precedente risultato in altri termini stabilisce il fatto che se abbiamo una base v di uno spazio vettoriale e consideriamo i trasformati dei vettori della base v per mezzo di un'affinità lineare B che opera su V, allora si ottiene una nuova base $w = B\underline{v}_1, \ldots, B\underline{v}_n$ che sarà equiorientata a v o meno a seconda che il determinante di B sia positivo o negativo.

Esempio 0.7.2. Siano dati $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^2$ espressi rispetto alla base canonica $e = \underline{e}_1, \underline{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$. Notiamo che $det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 1 > 0$; pertanto anche $Or(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 1$. In altri termini, $v = \underline{v}_1, \underline{v}_2$ è una base ortonormale equiorientata con

e. Anticipando alcune cose che verranno discusse in dettaglio nei paragrafi successivi, possiamo dare una giustificazione geometrica di quanto asserito. In effetti, la base v e' ottenuta da e facendo ruotare sia $\underline{e}_1$ che $\underline{e}_2$ di 45 gradi (i.e. $\pi/4$) in modo antiorario attorno a $\underline{0}$. Se R è la matrice che rappresenta in base e questa rotazione (cf. Proposizione 0.8.1) abbiamo che $det\ R = 1$ (come ogni rotazione, cf. Corollario 0.8.2).

Se invece prendiamo $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ abbiamo che $det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = Or(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = -1$, cioè $w = \underline{w}_1, \underline{w}_2$ è una base ortonormale non equiorientata con e. In effetti, come otteniamo la base w dalla base canonica e, per mezzo di un'isometria lineare? Ad esempio, compiamo prima la rotazione R in senso antiorario di angolo $\pi/4$ portando la base canonica e nella base v, come sopra. Poi, alla base v applichiamo la trasformazione S di riflessione rispetto al vettore $\underline{v}_1$. In particolare avremo $\underline{w}_1 = S(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$ mentre $\underline{w}_2 = S(\underline{v}_2) = -\underline{v}_1$. Perciò w è ottenuta da e prima per mezzo della rotazione R e poi applicando alla base intermedia v la riflessione S. È facile verificare che $det\ S = -1$ (come ogni riflessione ha, cf. Corollario 0.8.5). Pertanto la trasformazione composta che porta e in w è la trasformazione $S \circ R$ che, per il Teorema di Binet, ha determinate -1.

Osservazione 0.7.1. Abbiamo una visualizzazione geometrica del concetto di orientazione. Per semplicita' ci focalizziamo sui casi di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

• Se abbiamo una base ortonormale $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di $\mathbb{R}^2$, facendo ruotare $\underline{v}_1$, in direzione di $\underline{v}_2$, fino a farlo arrivare sulla retta vettoriale $Span(\underline{v}_2)$, se su tale retta vettoriale il vettore così ottenuto da $\underline{v}_1$ ed il vettore $\underline{v}_2$ hanno lo stesso verso, allora vuol dire che $Or(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 1$, se invece hanno verso opposto, allora $Or(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = -1$.

• Se abbiamo una base ortonormale $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ di $\mathbb{R}^3$, allora:
(a) $Or(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = 1$ si ha quando i vettori della base sono disposti in maniera tale da poter identificare $\underline{v}_1$ con il dito medio, $\underline{v}_2$ con il dito pollice e $\underline{v}_3$ con il dito indice della mano destra;
(b) $Or(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = -1$ si ha quando i vettori della base sono disposti in maniera tale da poter identificare $\underline{v}_1$ con il dito medio, $\underline{v}_2$ con il dito pollice e $\underline{v}_3$ con il dito indice della mano sinistra.

0.8 Alcune trasformazioni ortogonali fondamentali dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$ standard

In tutto questo paragrafo, considereremo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ munito di base canonica e e prodotto scalare standard.

Operatori di rotazione attorno al vettore nullo $\underline{0}$. Introduciamo adesso le *rotazioni* attorno al vettore nullo $\underline{0}$ in $\mathbb{R}^2$.

Definizione 0.8.1. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta,O}$ l'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sè che ad un arbitrario vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ associa il vettore $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$, vettore ottenuto ruotando il vettore $\underline{x}$ di angolo θ attorno al vettore nullo $\underline{0}$. $\mathcal{R}_\theta$ si chiama rotazione attorno al vettore nullo $\underline{0}$ di angolo θ.*

Proposizione 0.8.1. *Sia* $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *arbitrario. Allora*

$$\mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

In altri termini, se $\underline{y} = \mathcal{R}_\theta(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$*, le equazioni per la rotazione* $\mathcal{R}_\theta$ *sono date da:*

$$\begin{cases} y_1 = \cos\theta \; x_1 - \sin\theta \; x_2 \\ y_2 = \sin\theta \; x_1 + \cos\theta \; x_2. \end{cases} \tag{16}$$

In particolare,
- *se* $\theta = 0$*, allora* $\mathcal{R}_\theta = \mathrm{Id}$*;*
- *se* $\theta > 0$*, la rotazione di* $\underline{x}$ *è in senso antiorario rispetto al vettore* $\underline{e}_1$*;*
- *se* $\theta < 0$*, la rotazione di* $\underline{x}$ *è in senso orario rispetto al vettore* $\underline{e}_1$.

Dimostrazione. Sia α l'angolo convesso fra il vettore $\underline{x}$ e l'asse delle x_1. Precisamente, se $\underline{x}$ si trova nel I o IV quadrante, allora α è l'angolo convesso fra i vettori $\underline{x}$ ed $\underline{e}_1$; se $\underline{x}$ si trova invece nel II o III quadrante, allora α è l'angolo convesso fra i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{e}_1$. In ogni caso, si ha che

$$x_1 = ||\underline{x}|| \cos\alpha, \quad x_2 = ||\underline{x}|| \sin\alpha.$$

Il vettore $\underline{y} = \mathcal{R}_\theta(\underline{x})$ è tale che $||\underline{y}|| = ||\underline{x}||$ e forma con l'asse delle x_1 un angolo pari a $\alpha + \theta$. Pertanto

$$y_1 = ||\underline{x}|| \cos(\alpha + \theta), \quad y_2 = ||\underline{x}|| \sin(\alpha + \theta).$$

Per le formule di addizione delle funzioni trigonometriche e per le precedenti relazioni, abbiamo quindi:

$$y_1 = ||\underline{x}||(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,$$

$$y_2 = ||\underline{x}||(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta) = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

onde l'asserto. □

Corollario 0.8.2. *Per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$*, le rotazioni* $\mathcal{R}_\theta$ *attorno al vettore nullo sono traformazioni la cui matrice rappresentativa come in* (15) *è speciale ortogonale.*

Dimostrazione. La matrice rappresentativa di $\mathcal{R}_\theta$ nella base canonica (ortonormale) è manifestamente ortogonale. Infine, il determinate della matrice rappresentativa di $\mathcal{R}_\theta$ è dato da $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. □

Osservazione 0.8.1. Da quanto dimostrato in Proposizione 0.7.1 e dal Corollario 0.8.2-(ii), notiamo subito che le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ attorno all'origine in particolare conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, i.e. $Or(\underline{v}, \underline{w}) = Or(\mathcal{R}_\theta(\underline{v}), \mathcal{R}_\theta(\underline{w}))$, per ogni coppia di vettori linearmente indipendenti $\underline{v}, \underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Concludiamo osservando che le rotazioni attorno all'origine godono delle seguenti ovvie proprietà che discendono immeditamente da (15).

Proposizione 0.8.3. *(i) Per $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_\varphi \circ \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta+\varphi}$.*
(ii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}$.

In particolare, la composizione di rotazioni attorno all'origine è ancora una rotazione attorno all'origine e l'inversa di una rotazione attorno all'origine è una rotazione attorno all'origine.

Operatori di riflessione rispetto a rette vettoriali: consideriamo adesso altre trasformazioni fondamentali: le *riflessioni (o simmetrie)* rispetto a rette vettoriali.

Definizione 0.8.2. *Sia r una retta vettoriale di $\mathbb{R}^2$ orientata in modo tale che formi con il vettore $\underline{e}_1$ un angolo convesso $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Denotiamo con $\mathcal{S}_\varphi = \mathcal{S}_{\varphi,\underline{0}}$ l'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sè che ad un arbitrario vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ associa il vettore $\underline{y}$ ottenuto per riflessione di $\underline{x}$ rispetto ad r. $\mathcal{S}_\varphi$ viene detta riflessione (o simmetria) definita dalla retta vettoriale (orientata) r.*

Proposizione 0.8.4. *Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Allora*

$$\mathcal{S}_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

In particolare, se $\underline{y} = \mathcal{S}_\varphi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, le equazioni per la riflessione rispetto alla retta vettoriale r sono:

$$\begin{cases} y_1 = \cos 2\varphi\ x_1 + \sin 2\varphi\ x_2 \\ y_2 = \sin 2\varphi\ x_1 - \cos 2\varphi\ x_2. \end{cases} \tag{18}$$

Dimostrazione. Costruiamo in modo vettoriale tale riflessione. A meno di normalizzare il vettore direttore di r, dalle ipotesi fatte, possiamo supporre che il vettore direttore di r sia il versore $\underline{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. Denotiamo con $\underline{n}$ un vettore ortogonale ad $\underline{u}$ in modo che la base ortonormale $\{\underline{u}, \underline{n}\}$ sia equiorientata con la base canonica e di $\mathbb{R}^2$. Pertanto, $\underline{n} := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Utilizzando Proposizione 0.5.6, possiamo scrivere $\underline{x}$ come somma dei due vettori ottenuti per proiezione ortogonale di $\underline{x}$ su $\underline{u}$ e su $\underline{n}$; precisamente avremo:

$$\underline{x} = \langle \underline{x}, \underline{u} \rangle\ \underline{u} + \langle \underline{x}, \underline{n} \rangle\ \underline{n}. \tag{19}$$

Applicando la regola del parallelogramma, abbiamo immediatamente $\mathcal{S}_\varphi(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{u} \rangle\ \underline{u} - \langle \underline{x}, \underline{n} \rangle\ \underline{n}$, dove $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathcal{S}_\varphi(\underline{\mathbf{x}})$ e $\phi = \varphi$).

Da (19), abbiamo che $\langle \underline{x}, \underline{u} \rangle\ \underline{u} = \underline{x} - \langle \underline{x}, \underline{n} \rangle\ \underline{n}$. Quindi l'equazione vettoriale per la riflessione $\mathcal{S}_\varphi$ e':

$$\mathcal{S}_\varphi(\underline{x}) = \underline{x} - 2\langle \underline{x}, \underline{n} \rangle\ \underline{n}. \tag{20}$$

Osserviamo che $\langle \underline{x}, \underline{n} \rangle = -\sin\varphi \ x_1 + \cos\varphi \ x_2$. Passando in coordinate nell'equazione vettoriale (20), otteniamo $\mathcal{S}_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2(-\sin\varphi \ x_1 + \cos\varphi \ x_2) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2\sin^2\varphi) \ x_1 + 2\sin\varphi\cos\varphi \ x_2 \\ 2\sin\varphi\cos\varphi \ x_1 + (1-2\cos^2\varphi) \ x_2 \end{pmatrix}$. Ricordando che $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)$, $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi)$, $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ otteniamo (18). $\square$

Corollario 0.8.5. *Per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, le riflessioni $\mathcal{S}_\varphi$ rispetto a rette vettoriali sono trasfromazioni la cui matrice rappresentativa come in* (17) *è ortogonale non speciale.*

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella di Corollario 0.8.2. La sola differenza è che il determinate di $\mathcal{S}_\varphi$ è dato da $-\cos^2(2\varphi) - \sin^2(2\varphi) = -1$. $\square$

Osservazione 0.8.2. Differentemente da quanto discusso in Osservazione 0.8.1, da Proposizione 0.7.1 e dal Corollario 0.8.5-(ii) notiamo subito che le riflessioni $\mathcal{S}_\varphi$ in particolare non conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, i.e. $Or(\mathcal{S}_\varphi(\underline{v}), \mathcal{S}_\varphi(\underline{w})) = -Or(\underline{v}, \underline{w})$, per ogni coppia di vettori linearmente indipendenti $\underline{v}, \underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$ e per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$.

Le riflessioni rispetto a rette vettoriali godono di ovvie proprietà che discendono immeditamente da (17).

Proposizione 0.8.6. *(i) $\mathcal{S}_0$ è la riflessione rispetto all'asse x_1 mentre $\mathcal{S}_{\pi/2}$ è la riflessione rispetto all'asse x_2. In altri termini $\mathcal{S}_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{S}_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.*
(ii) Per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_\varphi$ è involutoria i.e. $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\varphi = \mathrm{Id}$. In particolare, $\mathcal{S}_\varphi^{-1} = \mathcal{S}_\varphi$.
(iii) Per $\varphi \neq \psi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi = \mathcal{R}_{2(\varphi-\psi)}$. In particolare, se $\varphi = \psi + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi = \mathrm{Id}$.

In altri termini:
• a differenza delle rotazioni attorno all'origine, la composizione di riflessioni non gode della proprietà commutativa, i.e. in generale si ha $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi \neq \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\varphi$.
• La composizione di due riflessioni rispetto a rette vettoriali distinte è una rotazione. Il fatto che una tale composizione venga un'isometria lineare diretta (e non più inversa) è chiaro dal Teorema di Binet e dal fatto che ogni riflessione rispetto ad una retta vettoriale, essendo un'isometria lineare inversa, ha determinante -1.

Riflessioni rispetto all'origine: questo sarà un caso particolare di quanto discusso prima.

Definizione 0.8.3. *Denotiamo con $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè che ad un arbitrario vettore $\underline{x}$ associa il vettore $-\underline{x}$. $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ è detta riflessione rispetto al vettore nullo.*

È chiaro dalla definizione che $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ non è altro che la rotazione attorno al vettore nullo, di angolo $\theta = \pi$. Pertanto, $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ è una trasformazione ortogonale speciale (come tutte le rotazioni), quindi conserva l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, come ciascuna rotazione fa. Inoltre, le sue equazioni sono chiaramente:

$$\mathcal{S}_{\underline{0}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

0.9 Alcune trasformazioni ortogonali fondamentali dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ standard

Come nel paragrafo precedente, qui consideriamo $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale euclideo, munito di base canonica e e prodotto scalare standard.

Equazioni di rotazioni attorno a rette vettoriali: come fatto per $\mathbb{R}^2$, cominciamo con il le *rotazioni* attorno ad una retta vettoriale. Diamo la seguente:

Definizione 0.9.1. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta, \underline{e}_1}$ l'applicazione di $\mathbb{R}^3$ in sè che ad un arbitrario vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ associa il vettore $\underline{y}$ ottenuto ruotando il vettore $\underline{x}$ di un angolo θ attorno al vettore $\underline{e}_1$ della base canonica e. $\mathcal{R}_\theta$ si chiama rotazione di angolo θ attorno alla retta vettoriale (orientata) $Span(\underline{e}_1)$.*

Proposizione 0.9.1. *Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario. Allora*

$$\mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

In particolare, se $\underline{y} = \mathcal{R}_\theta(\underline{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, le equazioni per la rotazione $\mathcal{R}_\theta$ sono date da:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \cos\theta \; x_2 - \sin\theta \; x_3 \\ y_3 = \sin\theta \; x_2 + \cos\theta \; x_3. \end{cases} \tag{23}$$

In particolare,
• *se $\theta = 0$, allora $\mathcal{R}_\theta = \mathrm{Id}$;*
• *se $\theta > 0$, la rotazione indotta sul piano vettoriale (x_2, x_3) è in senso antiorario rispetto al vettore $\underline{e}_2$;*
• *se $\theta < 0$, la rotazione indotta sul piano vettoriale (x_2, x_3) è in senso orario rispetto al vettore $\underline{e}_2$.*

Dimostrazione. Osserviamo che la rotazione $\mathcal{R}_\theta$ per costruzione fissa il vettore $\underline{e}_1$ della base e, mentre sul piano vettoriale (x_2, x_3) si comporta come una rotazione di $\mathbb{R}^2$ attorno al vettore nullo. Pertanto, le formule precedenti discendono immediatamente da questa osservazione e dalla dimostrazione di Proposizione 0.8.1. □

Abbiamo le ovvie conseguenze della precedente proposizione, le cui dimostrazioni sono identiche a quelle svolte per le rotazioni in $\mathbb{R}^2$ attorno all'orgine.

Corollario 0.9.2. *Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ attorno al vettore $\underline{e}_1$ sono trasformazioni (od operatori)di angolo θ la cui matrice rappresentativa come in* (22) *è speciale ortogonale.*

Osservazione 0.9.1. Da quanto dimostrato in Proposizione 0.7.1 e dal Corollario 0.9.2-(ii), notiamo subito che le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ attorno a $\underline{e}_1$ in particolare conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, i.e. $Or(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = Or(\mathcal{R}_\theta(\underline{u}), \mathcal{R}_\theta(\underline{v}), \mathcal{R}_\theta(\underline{w}))$, per ogni terna di vettori linearmente indipendenti $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposizione 0.9.3. *(i) Per $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_\varphi \circ \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta+\varphi}$.*
(ii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}$.

In particolare, osserviamo che la composizione di rotazioni attorno a $\underline{e}_1$ è ancora una rotazione attorno a $\underline{e}_1$ e l'inversa di una rotazione attorno a $\underline{e}_1$ è una rotazione attorno a $\underline{e}_1$.

Non tutte le rotazioni lineari coinvolte in possibili problemi di geometria in $\mathbb{R}^3$ saranno necessariamente attorno al vettore $\underline{e}_1$. Vogliamo quindi determinare le formule di rotazione attorno ad una retta vettoriale qualsiasi utilizzando quanto dimostrato in Proposizione 0.9.1.

Supponiamo dunque di avere una retta vettoriale r di $\mathbb{R}^3$; vogliamo determinare le formule della rotazione di angolo θ attorno a r. Prima di tutto, affinchè il problema sia ben posto, dobbiamo avere un'orientazione di retta r: se r non è orientata, non è chiaro in quale direzione si deve fare la rotazione nel piano vettoriale $r^\perp$. Pertanto, fissiamo su r un vettore direttore $\underline{v}$. Per fissare il senso della rotazione parleremo quindi di *rotazione di angolo θ attorno al vettore $\underline{v}$* e la denoteremo con $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$. Un modo naturale per ottenere le formule di una tale rotazione è descritta nel seguente procedimento.

(1) In primo luogo, sia $\underline{f}_1$ il versore direttore di r associato a $\underline{v}$, i.e. $\underline{f}_1 = \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||}$. Scegliamo poi due altri versori $\underline{f}_2$ e $\underline{f}_3$, di modo che $f := \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ ed equiorientata con la base canonica e (cf. Definizione 0.7.2-(i)). Trovare una tale base f è molto semplice:
• il secondo versore $\underline{f}_2$ di f si determina prendendo un qualsiasi vettore non nullo $\underline{w}$ scelto ad arbitrio tra tutti quei vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\underline{v}$ e poi si considera il versore associato a $\underline{w}$, i.e. $\underline{f}_2 = \frac{\underline{w}}{||\underline{w}||}$;
• il terzo ed ultimo versore di f è dato direttamente da $\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2$, ove $\wedge$ e' il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Notiamo quindi che basi siffatte possono essere scelte in infiniti modi.

(2) Siano ora $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ le coordinate di un arbitrario vettore $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ espresse rispetto alla base f precedentemente determinata. In tale base, la rotazione $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ è la rotazione di angolo θ attorno a

$\underline{f}_1$. Quindi, nelle notazioni di Proposizione 0.9.1, questa non è altro che la rotazione $\mathcal{R}^f_\theta = \mathcal{R}^f_{\theta,\underline{f}_1}$, dove l'apice in alto sta a ricordare che stiamo vedendo tutto relativamente alla base f. Abbiamo quindi da Proposizione 0.9.1:

$$\mathcal{R}^f_\theta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

In altre parole, la matrice rappresentativa di $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ in base f è $A^f := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(3) L'obiettivo finale è quello di determinare la matrice $A := A^e$ della rotazione cercata, espressa rispetto alla base e di partenza. Per fare questo, sia $M := M_{e\,f}$ la matrice cambiamento di base dalla base e alla base f. Poiché e ed f sono ambedue basi ortonormali, da Teorema 0.5.5, M è una matrice 3×3 ortogonale, i.e. ${}^tMM = I_3$ (cf. Definizione 0.5.2). Sia

$$\underline{x} = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\underline{f}_1\ \underline{f}_2\ \underline{f}_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

un vettore arbitrario di $\mathbb{R}^3$ espresso nelle sue coordinate sia rispetto alla base e che alla base f, e sia

$$\underline{z} = \mathcal{R}_{\theta,v}(\underline{x}) = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = (\underline{f}_1\ \underline{f}_2\ \underline{f}_3)(A^f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix})$$

il vettore trasformato mediante la rotazione considerata, espresso nei diversi sistemi di coordinate. Ricordiamo che, per definizione di $M = M_{e\,f}$ si ha

$$(\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)M = (\underline{f}_1\ \underline{f}_2\ \underline{f}_3).$$

Pertanto, dalla precedente eguaglianza vettoriale abbiamo:

$$\underline{z} = \mathcal{R}_{\theta,v}(\underline{x}) = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)M(A^f \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}). \tag{25}$$

Poiché $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate del vettore $\underline{x}$ rispetto ad e e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ è la colonna delle coordinate del medesimo vettore rispetto ad f, dalla formula del cambiamento di coordinate e dalla definizione di matrice cambiamento di base $M = M_{e\,f}$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dato che $M^{-1} = {}^tM$ visto che M e' ortogonale. Da (25), otteniamo quindi l'eguaglianza

$$(\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)\left(A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = (\underline{e}_1\ \underline{e}_2\ \underline{e}_3)M\left(A^f\left({}^tM\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)\right), \tag{26}$$

valida per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Pertanto, (26) induce la seguente equaglianza fra matrici:

$$A = M\ A^f\ {}^tM, \tag{27}$$

che determina l'espressione della matrice di rotazione $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ in base e come voluto.

Osservazione 0.9.2. La relazione 27 dipende anche dal fatto che rappresentiamo l'operatore rotazione in due basi differenti entrambi ortogonali

Utilizzando Corollario 0.9.2 e Proposizione 0.9.3, abbiamo il seguente risultato immediato:

Corollario 0.9.4. *Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, le rotazioni $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ di angolo θ attorno ad una qualsiasi retta vettoriale orientata $r = Span(\underline{v})$ sono operatori la cui matrice rappresentativa e' ortogonale speciale. In particolare, tali rotazioni conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e godono delle seguenti proprietà:*
(i) Se $\theta = 0$, allora $\mathcal{R}_{0,\underline{v}} = \mathrm{Id}$;
(ii) Per $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} \circ \mathcal{R}_{\varphi,\underline{v}} = \mathcal{R}_{\varphi,\underline{v}} \circ \mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} = \mathcal{R}_{\theta+\varphi,\underline{v}}$.
(iii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta,\underline{v}}$.

Dimostrazione. Notiamo che, da (27), per il Teorema di Binet, si ha

$$det\ A = (det\ M)\ (det\ A^f)\ (det\ {}^tM) = (det\ M)\ (det\ A^f)\ (det\ M)^{-1} = det\ A^f,$$

dove la penultima eguaglianza discende direttamente dal fatto che M è ortogonale e dalla proprietà del determinante della matrice inversa. Pertanto, per concludere basta applicare Corollario 0.9.2, Osservazione 0.9.1 e Proposizione 0.9.3.

□

Esempio 0.9.1. A titolo di esempio, scriviamo le formule di rotazione $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2},\underline{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno al vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Da quanto descritto sopra, vogliamo determinare $f = \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata e con $\underline{f}_1 = \underline{v}/||\underline{v}|| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Per prendere un vettore $\underline{w}$ ortogonale a $\underline{f}_1$, notiamo ad esempio che le coordinate di $\underline{f}_1$ sono tutte uguali; perciò una scelta possibile e naturale è prendere $\underline{w} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, almeno avremo sicuramente

$\langle \underline{f}_1, \underline{w} \rangle = 0$. Con tale scelta, abbiamo $\underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. In base f, la matrice della rotazione $R_{\pi/2,\underline{v}}$ è $A^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Percio', visto che $M = M_{e\ f}$ ha come colonne le coordinate dei vettori della base f espresse in funzione della base e, si ha $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, che è una matrice ortogonale. Pertanto, la matrice della rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ in base e è:

$$A = M\ A^f\ \ {}^tM = \begin{pmatrix} 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Riflessioni rispetto a rette vettoriali: consideriamo adesso le *riflessioni (o simmetrie)* rispetto a rette vettoriali.

Definizione 0.9.2. *Sia r una retta vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con $\mathcal{S}_{r,\underline{0}}$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ che ad un arbitrario vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ associa il vettore $\underline{y}$ ottenuto per riflessione di $\underline{x}$ rispetto a r.*

Notiamo subito che la riflessione rispetto ad una retta vettoriale r è un particolare tipo di rotazione lineare, precisamente è la rotazione di angolo π intorno a r. In questo caso, è immediato osservare che il risultato non dipende dall'orientazione di r.

Da ultimo, per ogni retta vettoriale r, $\mathcal{S}_{r,\underline{0}}$ conserva l'orientazione di basi di $\mathbb{R}^3$.

Riflessioni rispetto all'origine:

Definizione 0.9.3. *Denotiamo con $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè definita in modo che, ad ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ si associa il vettore $-\underline{x}$. $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ è detta riflessione rispetto all'origine.*

Le equazioni di questa riflessione sono chiaramente:

$$\mathcal{S}_{\underline{0}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Pertanto, $\mathcal{S}_{\underline{0}}$ non conserva l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Matrici simmetriche ed operatori autoaggiunti

In questo capitolo studiamo alcune proprietà fondamentali delle matrici simmetriche definite su uno spazio vettoriale euclideo V. Assoceremo a tali matrici degli opportuni operatori lineari su V, detti *operatori autoaggiunti*. Questo permetterà di dimostrare due risultati fondamentali (cf. Teoremi 0.11.1 e 0.12.2): il primo stabilisce che le matrici simmetriche ammettono sempre spettro reale, il secondo assicura che tali matrici sono sempre diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ e che la diagonalizzazione avviene in una base ortonormale per V.

0.10 Operatori autoaggiunti e matrici simmetriche

Definizione 0.10.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia F un operatore lineare su V. Allora, F si dice operatore autoaggiunto (rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$) se, per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in V$, vale:*

$$\langle F(\underline{x}), \underline{y}\rangle = \langle \underline{x}, F(\underline{y})\rangle. \tag{29}$$

A volte un tale operatore viene chiamato anche operatore *simmetrico*, per via della simmetria in (29). Tuttavia, come vedremo in seguito (cf. Esempio 0.10.1), il termine simmetrico potrebbe generare confusione. Pertanto, in tale testo preferiamo utilizzare la terminologia di opertatore autoaggiunto.
Come per gli operatori ortogonali, vogliamo stabilire come si rappresentano gli operatori autoaggiunti rispetto ad opportune basi. Per fare questo, dobbiamo considerare alcune questioni preliminari.

Ricordando Lemma 0.5.4 e Corollario 0.6.2, possiamo stabilire come si presentano gli operatori autoaggiunti in opportune basi.

Proposizione 0.10.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia F un opertatore autoaggiunto.*
(i) Sia f una qualsiasi base ortonormale di $(V, \langle , \rangle)$. Sia $A = M_f(F)$. Allora A è una matrice simmetrica, i.e. $A = {}^tA$.
(ii) Se f' è un'altra base ortonormale, sia $B = M_{f'}(F)$. Allora, B è essa stessa una matrice simmetrica, che è inoltre congruente ad A. Precisamente, se $M = M_{f\,f'}$ è la matrice cambiamento di base da f a f', allora $B = {}^tMAM$.

Dimostrazione. (i) Sia $\underline{f}_j$ un qualsiasi vettore della base f, $1 \leq j \leq n$. Se $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, abbiamo per definizione che

$$F(\underline{f}_j) = a_{1j}\underline{f}_1 + a_{2j}\underline{f}_2 + \ldots + a_{nj}\underline{f}_n, \ \ \forall \ 1 \leq j \leq n. \tag{30}$$

Il fatto che f è ortonormale, determina $B_f(\langle \ , \ \rangle) = I_n$ (cf. Proposizione 0.5.1). Pertanto, da (30) vediamo subito che

$$\langle F(\underline{f}_j), \underline{f}_i \rangle = \langle a_{ij}\underline{f}_i, \underline{f}_i \rangle = a_{ij}, \ \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n.$$

D'altra parte, sempre da (30) dove utilizziamo l'indice i al posto dell'indice j, abbiamo

$$\langle \underline{f}_j, F(\underline{f}_i) \rangle = \langle \underline{f}_j, a_{ji}\underline{f}_j \rangle = a_{ji} \ \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Dalla condizione (29) che stabilisce che F è autoaggiunto, abbiamo quindi che $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall \ 1 \leq i, j \leq n$. Pertanto A è simmetrica.
(ii) Poiché la base f' è ortonormale, per (i) $B = M_{f'}(F)$ è simmetrica. Ora, dato che A e B sono due matrici (simmetriche) che rappresentano lo stesso operatore F in due basi diverse, allora esse sono coniugate mediante la matrice cambiamento di base $M := M_{f\,f'}$, i.e. vale $B = M^{-1}AM$. Poiché f e f' sono inoltre ortonormali, da Teorema 0.5.5 M è una matrice ortogonale. Pertanto, da Corollario 0.6.2, $B = {}^tMAM$, i.e. A e B sono congruenti per mezzo di M.

□

Osservazione 0.10.1. Notiamo che il fatto che B sia simmetrica discende automaticamente dalla relazione di congruenza tra A e B e dal fatto che A è simmetrica; infatti abbiamo:

$${}^tB = {}^t({}^tMAM) = {}^tM\,{}^tA\,{}^t({}^tM) = {}^tM\,{}^tA\,{}^t({}^tM) = {}^tMAM = B. \tag{31}$$

Osservazione 0.10.2. Possiamo invertire la corrispondenza precedentemente descritta. Infatti, se A è una matrice simmetrica di ordine n, possiamo considerare A come la matrice associata ad un operatore autoaggiunto in un'opportuna base ortonormale f di $(V, \langle \ , \ \rangle)$, che determina l'identificazione dello spazio vettoriale euclideo V con $\mathbb{R}^n$. Tale operatore autoaggiunto $F = F_A^f$ sarà definito estendendo per linearità le relazioni (30) valide per i versori della base ortonormale f. In altri termini, parlare di operatori autoaggiunti su V, spazio euclideo di dimensione n, o di matrici simmetriche reali di ordine n, relativamente a basi ortonormali di V, sono cose equivalenti. Inoltre, poiché l'operatore così determinato è autoaggiunto, da Proposizione 0.10.1-(ii), in differenti basi dovrà valere la relazione di congruenza fra le varie matrici rappresentative.

In particolare, abbiamo dimostrato quindi:

Corollario 0.10.2. *Sia $(V, \langle \ , \ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.*
(i) *Un operatore F su V è autoaggiunto se, e solo se, la matrice rappresentativa di F in ciascuna base ortonormale di V è una matrice simmetrica.*
(ii) *Due matrici simmetriche A e B, $n \times n$, rappresentano lo stesso operatore autoaggiunto rispetto a due diverse basi ortonormali di V se, e solo se, sono congruenti.*

Il *rango dell'operatore autoaggiunto* F è il rango della matrice simmetrica $A = M_f(F)$ che lo rappresenta in una qualsiasi base ortonormale f di V.

Osserviamo che Proposizione 0.10.1 e quanto discusso in Osservazione 0.10.2 valgono sotto le ipotesi che la base f sia ortonormale. Precisamente, non è vero in generale che un operatore autoaggiunto ha, in ciascuna possibile base di V, una matrice rappresentativa che è simmetrica. Viceversa, non è vero che una matrice simmetrica rappresenti, in ciascuna base di $\mathbb{R}^n$, un operatore autoaggiunto. Vediamo i seguenti esempi.

Esempio 0.10.1. Sia $\mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale euclideo, con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ standard come in Esempio 0.2.2 e con base canonica e come base ortonormale fissata. Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tale matrice definisce l'operatore $F = F_A^e$ che, in base e, è determinato dalle condizioni

$$F(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2, \quad F(\underline{e}_2) = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2.$$

Tale operatore è definito su tutto lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ per le proprietà di linearità di F. Da Osservazione 0.10.2, poiché A è simmetrica ed e è ortonormale, l'operatore F è autoaggiunto. Sia ora g la base data dai vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$, le cui coordinate rispetto ad e sono $\underline{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{g}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La base g è manifestamente non ortonormale. Pertanto, se denotiamo con $M = M_{e\,g}$ la matrice cambiamento di base da e a g, l'operatore autoaggiunto F ha in base g matrice rappresentativa

$$B = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che non è simmetrica.

Esempio 0.10.2. Sia $\mathbb{R}^2$ lo spazio vettoriale euclideo munito di prodotto scalare standard, con base canonica e fissata. Sia g la base definita in Esempio 0.10.1. Sia S l'operatore di $\mathbb{R}^2$ definito in base g dalle condizioni $S(\underline{g}_1) = \underline{g}_1 + \underline{g}_2$, $S(\underline{g}_2) = \underline{g}_1 - \underline{g}_2$. In base g, l'operatore S ha matrice rappresentativa $C := M_g(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che è simmetrica. Però, S non è un operatore autoaggiunto. Infatti

$$\langle S(\underline{g}_1), \underline{g}_2\rangle = \langle \underline{g}_1, \underline{g}_2\rangle + \langle \underline{g}_2, \underline{g}_2\rangle, \quad \text{e} \quad \langle \underline{g}_1, S(\underline{g}_2)\rangle = \langle \underline{g}_1, \underline{g}_1\rangle - \langle \underline{g}_1, \underline{g}_2\rangle;$$

utilizzando le coordinate dei vettori di g rispetto ad e, notiamo che $\langle S(\underline{g}_1), \underline{g}_2\rangle = 8 \neq \langle \underline{g}_1, S(\underline{g}_2)\rangle = -1$. Si può verificare (lasciamo il compito al lettore) che in effetti $M_e(S)$ non è simmetrica, come ci si doveva aspettare da Corollario 0.10.2.

0.11 Autovalori di una matrice simmetrica

Abbiamo visto in § 0.6 che le matrici ortogonali possono non ammettere autovalori reali (in particolare possono non essere diagonalizzabili). In questo paragrafo dimostriamo che una tale situazione non capita mai per gli autovalori di matrici simmetriche. Precisamente, dimostreremo che una qualsiasi matrice simmetrica $n \times n$ ha esclusivamente autovalori reali. Questo avrà conseguenze fondamentali sugli operatori autoaggiunti in uno spazio vettoriale euclideo (cf. § 0.12).

Una breve nota su come sarà organizzato questo paragrafo. Per le conseguenze sugli operatori autoaggiunti in uno spazio euclideo di dimensione n, avremo bisogno di dimostrare che una qualsiasi matrice simmetrica $n \times n$ ammette esclusivamente autovalori reali, per ogni $n \geq 1$. Il modo più breve per dimostrare questo risultato utilizza i numeri complessi (cf. Teorema 0.11.1). Invece, per $n \leq 3$ intero positivo, si possono utilizzare tecniche più elementari, che non ricorrono ad i numeri complessi. Pertanto, per facilitare il lettore eventualmente poco avvezzo ad i numeri complessi, in Teorema 0.11.2 tratteremo per via elementare i casi particolari con $n \leq 3$.

Teorema 0.11.1. *Sia $n \geq 1$ un intero. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Allora A ha esclusivamente autovalori reali.*

Dimostrazione. Se $n = 1$, non c'è nulla da dimostrare. Pertanto, assumiamo d'ora in poi $n > 1$. Se A è la matrice nulla, essa ha tutti gli autovalori uguali a zero, i.e. 0 è un autovalore di molteplicità algebrica n. Assumiamo quindi che A sia una matrice non identicamente nulla.
Sia T un'indeterminata e sia

$$P(T) = P_A(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$$

il polinomio caratteristico di A, con $a_n = \pm 1$ e $a_j \in \mathbb{R}$ opportuni, per $0 \leq j \leq n-1$. Tale polinomio è non nullo ed a coefficienti reali perché A è una matrice reale, non nulla.
Ora, sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi. È ben noto che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Pertanto il polinomio $P(T)$ si può vedere come un particolare polinomio a coefficienti complessi: precisamente i coefficienti di tale polinomio sono tutti numeri complessi della forma $c_j := a_j + \mathrm{i} \cdot 0$, dove i l'unità immaginaria; in altri termini i c_j hanno parte immaginaria nulla, per ogni $0 \leq j \leq n$. Ricordiamo che per $\mathbb{C}$ vale il *Teorema fondamentale dell'Algebra*, i.e. ogni polinomio in una indeterminata T ed a coefficienti in $\mathbb{C}$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{C}$. Pertanto, il polinomio $P(T)$ ha sicuramente tutte le sue radici in $\mathbb{C}$. Si tratta di dimostrare che, per ogni radice λ di $P(T)$, si ha $\lambda \in \mathbb{R}$.

Come fatto per il polinomio caratteristico, possiamo considerare la matrice A come una particolare matrice $n \times n$ su $\mathbb{C}$: gli elementi della matrice A sono particolari numeri complessi che hanno la parte immaginaria nulla, dato che per ipotesi A era una matrice reale. In tal modo, possiamo considerare $F = F_A$ l'operatore lineare sullo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^n$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica $e_{\mathbb{C}}$ di $\mathbb{C}^n$. Poiché λ è un autovalore di A, e quindi di F, esiste un autovettore $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ di F tale che $F(\underline{z}) = A\underline{z} = \lambda \underline{z}$. Moltiplichiamo a sinistra l'ultima eguaglianza per ${}^t\overline{\underline{z}}$, dove $\overline{\underline{z}}$ è il vettore coniugato di $\underline{z}$, i.e. il vettore le cui coordinate rispetto ad $e_{\mathbb{C}}$ sono le coordinate coniugate di quelle di $\underline{z}$ (ricordiamo che il coniugato $\overline{a + \mathrm{i} \cdot b}$ del numero complesso $a + \mathrm{i} \cdot b$ è il numero complesso $a - \mathrm{i} \cdot b$). Si ha pertanto

$${}^t\overline{\underline{z}} A \underline{z} = {}^t\overline{\underline{z}} \lambda \underline{z} = \lambda \, {}^t\overline{\underline{z}} \; \underline{z}.$$

Se, rispetto ad $e_{\mathbb{C}}$, abbiamo coordinate $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}$, dove $z_j = a_j + \mathrm{i} \cdot b_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ per $1 \leq j \leq n$, allora

$$ {}^t\underline{\overline{z}}\ \underline{z} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j z_j = \sum_{j=1}^{n}(a_j^2 + b_j^2) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, $$

per ogni $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$. Perciò, poiché

$$ \lambda = \frac{{}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z}}{{}^t\underline{\overline{z}}\ \underline{z}}, $$

è sufficiente dimostrare che anche ${}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z} \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che un numero complesso $a + \mathrm{i} \cdot b$ è reale se, e solo se, $a + \mathrm{i} \cdot b = \underline{a + \mathrm{i} \cdot b}$ e che il coniugio di numeri complessi è involutorio, i.e. $\overline{\overline{a + \mathrm{i} \cdot b}} = a + \mathrm{i} \cdot b$. Perciò, poiché A è una matrice reale e simmetrica, si ha:

$$ \overline{{}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z}} = {}^t\underline{z}A\underline{\overline{z}} = {}^t\underline{z}\ {}^tA\underline{\overline{z}} = {}^t(\ {}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z}) = {}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z} $$

dove l'ultima eguaglianza discende dal fatto che, essendo ${}^t\underline{\overline{z}}A\underline{z}$ uno scalare, l'operazione di trasposizione opera come l'identità. $\square$

Osservazione 0.11.1. Se A è una matrice simmetrica $n \times n$, il suo polinomio caratteristico $P_A(T)$ è un polinomio di grado n. Se $\lambda_1, \dots \lambda_k$, $k \leq n$, sono tutti gli autovalori distinti di A il precedente risultato afferma che

$$ n = \sum_{i=1}^{k} a(\lambda_i). $$

Pertanto, $P_A(T)$ ha n radici distinte se, e solo se, tutti gli autovalori di A sono semplici.

Esempio 0.11.1. Consideriamo la matrice simmetrica

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Il polinomio caratteristico di A è $P_A(T) = (2 - T)(T^2 - 4)$. Vediamo subito che A ha tutti autovalori reali: l'autovalore $\lambda_1 = 2$ è semplice mentre l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è di molteplicità algebrica 2. Pertanto, il numero di autovalori distinti di A è $k = 2$, ma se ciascuno di essi viene contato con la relativa molteplicità algebrica otteniamo che il numero delle radici (non distinte) di $P_a(T)$ è 3, come il grado di $P_A(T)$.

Come specificato all'inizio di questo paragrafo il precedente risultato, per i casi $2 \leq n \leq 3$, si può dimostrare con tecniche più elementari e senza invocare i numeri complessi.

Teorema 0.11.2. *Sia $n \leq 3$ un intero positivo. Sia A una matrice simmetrica $n \times n$ reale. Allora A ha esclusivamente autovalori reali.*

Dimostrazione. Se $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Pertanto, assumiamo d'ora in poi $2 \leq n \leq 3$. Se A è la matrice nulla, essa ha tutti gli autovalori uguali a zero, i.e. 0 è un autovalore di molteplicità algebrica n, con $n = 2$ o 3. Assumiamo quindi che A sia una matrice non identicamente nulla.

• Vediamo prima il caso $n = 2$. Dalle ipotesi su A, esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è $P_A(T) = T^2 - (a + c)T - (b^2 - ac)$. Notiamo subito che, il discriminante dell'equazione di secondo grado data da $P_A(t) = 0$ e'

$$\Delta = (a + c)^2 + 4(b^2 - ac) = a^2 + c^2 + 2ac + 4b^2 - 4ac = (a - c)^2 + 4b^2.$$

L'unica possibilità per avere $\Delta = 0$ è $b = a - c = 0$: in tal caso, necessariamente si deve avere $a \neq 0$; ma allora $A = aI_2$, che pertanto ha due autovalori reali e coincidenti.
In tutti gli altri casi si ha necessariamente $\Delta > 0$, dato che Δ è somma di due quadrati dove almeno uno tra $a - c$ e b è diverso da zero. In tale eventualità, $P_A(T)$ ha due soluzioni reali e distinte.

• Supponiamo ora $n = 3$. Data A simmetrica non nulla 3×3, il suo polinomio caratteristico ha grado tre. È ben noto che un qualsiasi polinomio cubico ammette almeno una radice reale. Pertanto, nella nostra situazione, A ammette almeno un autovalore reale λ. Sia $\underline{v}$ un autovettore di A relativamente a λ. Sia $\underline{e}_v$ il versore ad esso associato, i.e. $\underline{e}_{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||}$.
Sia ora $\underline{v}^\perp$ il complemento ortogonale in $\mathbb{R}^3$ della retta vettoriale $Span(\underline{v})$. Prendiamo una qualsiasi base ortonormale di $\underline{v}^\perp$, sia essa $b = \underline{f}, \underline{f}'$. Pertanto, $g := \underline{e}_{\underline{v}}, \underline{f}, \underline{f}'$ è una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$. Sia $M = M_{e\,g}$ la matrice cambiamento di base dalla base canonica e a g. Poiché e e g sono basi ortonormali, M è ortogonale. Pertanto, in base g la matrice A si trasforma in $B = {}^tMAM$ che è quindi una matrice simmetrica (cf. e.g. (31)).

Il fatto che $\underline{e}_{\underline{v}}$ è un autovettore di A relativo all'autovalore λ implica che $B = \begin{pmatrix} \lambda & x & y \\ 0 & a & b \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$, con $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Poiché però, per quanto osservato, B deve essere simmetrica allora necessariamente $x = y = 0$ e $b = d$, i.e. B è della forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che il polinomio caratteristico di una matrice è invariante per la relazione di similitudine (equiv. coniugio). Poiché e e g sono basi ortonormali, da Corollario 0.6.2, in tal caso il polinomio caratteristico è invariante pure rispetto alla congruenza tra A e B, quindi

$$P_A(T) = P_B(T) = (\lambda - T)\,(T^2 - (a + c)T - (b^2 - ac)).$$

Dalla fattorizzazione precedente del polinomio, vediamo che il fattore lineare $(\lambda - T)$ fornisce la radice $\lambda \in \mathbb{R}$ considerata in precedenza, per il fattore quadratico si ragiona esattamente come nel caso $n = 2$, discusso in precedenza. In particolare, anche per $n = 3$, tutti gli autovalori di A sono reali. $\square$

0.12 Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti

In questo paragrafo consideriamo il problema dell'esistenza di *basi diagonalizzanti* per operatori autoaggiunti in uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Ricordiamo che queste basi diagonalizzanti sono basi in cui la matrice associata all'operatore autoaggiunto sarà una matrice diagonale.

Abbiamo bisogno preliminarmente del seguente:

Lemma 0.12.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n \geq 1$. Sia F un operatore autoaggiunto su V e sia $\underline{u}$ un suo autovettore, relativo ad un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora, denotato con $\underline{u}^\perp$ il complemento ortogonale in V di $Span(\underline{u})$, si ha:*

$$F(\underline{u}^\perp) \subseteq \underline{u}^\perp. \tag{32}$$

Dimostrazione. Per ipotesi, $F(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$. Per ogni $\underline{v} \in \underline{u}^\perp$, poiché F è autoaggiunto, si ha $\langle F(\underline{v}), \underline{u}\rangle = \langle \underline{v}, F(\underline{u})\rangle = \langle \underline{v}, \lambda\underline{u}\rangle = \lambda \langle \underline{v}, \underline{u}\rangle = 0$, cioè $F(\underline{v}) \in \underline{u}^\perp$.

□

Possiamo finalmente dimostrare il seguente:

Teorema 0.12.2. *(Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti) Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n \geq 1$. Sia F un operatore autoaggiunto su V. Allora esiste una base f, ortonormale per V, che è costituita da autovettori di F.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su $n = dim\ V$. Se $n = 1$, non c'è nulla da dimostrare: un qualsiasi $f \in \mathbb{R}$ tale che $f = \pm 1$ è la base voluta.
Supponiamo $n \geq 2$ e assumiamo vero l'asserto per $n-1$. Se F è l'operatore nullo, non c'è niente da dimostrare perché la sua matrice associata è la matrice nulla. Sia pertanto F non identicamente nullo. Sia e una qualsiasi base ortonormale per V. Poiché F è autoaggiunto, da Proposizione 0.10.1, $A := M_e(F)$ è una matrice simmetrica. Da Teorema 0.11.1, la matrice A ha tutti autovalori reali. Gli autovalori dell'operatore F coincidono con quelli di A, quindi sono tutti reali. Sia λ_1 uno di tali autovalori e sia $\underline{f}_1$ un autovettore ad esso associato. A meno di normalizzare, si può supporre che $||\underline{f}_1|| = 1$.

Osserviamo che, con notazioni come in Lemma 0.12.1, $\underline{f}_1^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione $n-1$. In base a (32), $F(\underline{f}_1^\perp) \subseteq \underline{f}_1^\perp$, cioè la restrizione dell'operatore F al sottospazio $\underline{f}_1^\perp$ definisce un operatore $F_1 : \underline{f}_1^\perp \to \underline{f}_1^\perp$ che è ovviamente ancora autoaggiunto, in quanto $F_1 = F|_{\underline{f}_1^\perp}$, quindi esso agisce come F sui vettori di $\underline{f}_1^\perp$.
Per ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale di $\underline{f}_1^\perp$ che è costituita da autovettori di F_1. Denotiamo tale base con $\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$. Per come è costruito il tutto, $f := \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$ è una base ortonormale di V perché i vettori sono a due a due ortogonali fra loro e ciascuno di norma unitaria. Inoltre essi sono, per costruzione, tutti autovettori di F. □

Osservazione 0.12.1. Il termine *spettrale* è collegato allo spettro dell'operatore lineare F. Il precedente teorema determina delle condizioni più forti di quelle discusse in Osservazione 0.11.1. Infatti, dato F autoaggiunto, fissiamo una base ortonormale per V, sia essa e. Otteniamo una matrice simmetrica $A = M_e(F)$ di ordine n. Per il Teorema 0.11.1, A ammette tutti autovalori reali, ciascuno contato con la propria molteplicità algebrica; il precedente risultato ci assicura inoltre che, per ogni autovalore λ di A, $a(\lambda) = g(\lambda)$. Pertanto, A nella base f del Teorema spettrale si diagonalizza.

Corollario 0.12.3. *Sia f una base di V come nella dimostrazione di Teorema 0.12.2. Allora $M_f(F)$ è una matrice diagonale D, i cui elementi diagonali sono tutti gli autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di F, $k \leq n$, e dove ciascun λ_i comparirà sulla diagonale principale di D tante volte quanto è la sua molteplicità algebrica (equiv. geometrica), $1 \leq i \leq k$.*

Dimostrazione. Il fatto che la matrice $D = M_f(F)$ sia diagonale discende direttamente da Teorema 0.12.2. La seconda parte dell'enunciato discende direttamente dalla definizione di base di autovettori di F e di molteplicità geometrica di un autovalore. $\square$

Dal Corollario 0.12.3, abbiamo quindi la seguente:

Definizione 0.12.1. *Una siffatta base f di V viene chiamata base ortonormale diagonalizzante F.*

Osservazione 0.12.2. (a) Osserviamo che, nella dimostrazione di Teorema 0.12.2, A e D sono simili per mezzo della matrice cambiamento di base $M = M_{e\,f}$. Poiché però le basi e ed f sono ortonormali, allora M è ortogonale. In particolare, da Lemma 0.5.4, A e D sono congruenti; in altri termini la diagonalizzazione di A si ha in una base ortonormale di V ed avviene per mezzo di una matrice ortogonale M. Per cui, al livello computazionale, per passare da A a D basta calcolare solo la trasposta di una matrice, che è un calcolo molto più rapido di quello necessario per determinare una matrice inversa.
(b) Non esiste un Teorema spettrale per gli operatori ortogonali. Ricordiamo infatti che ad esempio in Osservazione 0.6.1-(c) abbiamo visto operatori ortogonali non diagonalizzabili, poiché privi di autovalori reali.

Abbiamo diverse formulazioni equivalenti del Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti. Precisamente:

Teorema 0.12.4. *(i) Per ogni matrice simmetrica reale A, $n \times n$, esiste una matrice ortogonale M, $n \times n$, tale che ${}^tMAM$ è diagonale.*

(ii) Il rango della matrice simmetrica A come in (i) è uguale al numero di elementi λ_i non nulli che sono sulla diagonale principale della matrice D come in Corollario 0.12.3.

Dimostrazione. (i) Se A è simmetrica, da Corollario 0.10.2, essa è la matrice di un operatore autoaggiunto $F = F_A^e$ rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^n$. La conclusione segue direttamente da Corollario 0.12.3 e da Osservazione 0.12.2.
(ii) Per A, discende direttamente da (i) e dal fatto che il rango è una nozione invariante la relazione di similitudine e quindi, con matrici ortogonali, anche per congruenza. $\square$

Concludiamo osservando che, come diretta conseguenza della dimostrazione di Teorema 0.12.2, abbiamo il seguente risultato che suggerirà una procedura operativa per determinare una base ortonormale diagonalizzante come nel Teorema spettrale e quindi la forma precisa della matrice diagonale D.

Proposizione 0.12.5. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n \geq 1$ e sia F un operatore autoaggiunto su V. Se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono due autovettori di F relativi a due autovalori distinti di F allora $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono ortogonali. Ne segue che, gli autospazi di F sono a due a due ortogonali.*

Dimostrazione. Sia $F(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$ e $F(\underline{y}) = \mu \underline{y}$, con $\lambda \neq \mu$ i relativi autovalori reali. Ora $\langle F(\underline{x}), \underline{y}\rangle = \lambda\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ e $\langle \underline{x}, F(\underline{y})\rangle = \mu\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$. Poiché F è autoaggiunto, allora deve valere $\lambda\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \mu\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$. Dal fatto che $\lambda \neq \mu$, segue che $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = 0$.

□

Osservazione 0.12.3. Data una matrice simmetrica A $n \times n$ (equivalentemente, una forma quadratica $\mathcal{Q}$ di ordine n), il precedente risultato fornisce un metodo operativo per calcolare la base f ortonormale che diagonalizza A e la matrice M che rende A congruente ad una matrice diagonale D. Questo permetterà inoltre di precisare ulteriormente quanto dimostrato in Corollario 0.12.3. Si procede nel modo seguente:

(a) Si calcola il polinomio caratteristico di A e tutte le sue radici reali, contate con la relativa molteplicità algebrica;

(b) Si sceglie una fra queste radici come primo autovalore di A; sia esso λ_1 e sia $a(\lambda_1)$ la sua molteplicità algebrica. L'autospazio V_{λ_1} ha anche esso dimensione $a(\lambda_1)$ (cf. Osservazione 0.12.1). Determiniamo le equazioni che rappresentano V_{λ_1} considerando le equazioni che rappresentano il sottospazio $Ker\ (A - \lambda_1\ I_n)$, i.e. risolviamo il sistema lineare omogeneo scritto in forma vettoriale $(A - \lambda_1\ I_n)\underline{X} = \underline{0}$.

(c) Scegliamo una qualsiasi base per V_{λ_1} e la ortonormalizziamo mediante il procedimento di Gram-Schmidt applicato nel sottospazio V_{λ_1} (cf. Teorema 0.4.4). Otteniamo una base ortonormale per V_{λ_1} della forma $\underline{f}_1^{\lambda_1}, \ldots, \underline{f}_{a(\lambda_1)}^{\lambda_1}$.

(d) Tra gli autovalori residui di A (i.e. distinti da λ_1) ne prendiamo un secondo, sia esso λ_2 di molteplicità algebrica $a(\lambda_2)$. Per esso, ripercorriamo i punti (b) e (c). Alla fine, otteniamo una base ortonormale per V_{λ_2} della forma $\underline{f}_1^{\lambda_2}, \ldots, \underline{f}_{a(\lambda_2)}^{\lambda_2}$

(e) Procedendo così come in (b), (c) e (d) per tutti gli autovalori distinti di A, esauriamo il calcolo di tutti gli autospazi di A, V_{λ_1}, V_{λ_2}, ..., V_{λ_k}, per qualche $k \leq n$, e di tutte le loro rispettive basi ortonormali calcolate come nel punto (c).

(f) L'unione della base ortonormale di V_{λ_1}, di quella di V_{λ_2}, ..., di quella di V_{λ_k} determina una base ortonormale

$$f := \underline{f}_1^{\lambda_1}, \ldots, \underline{f}_{a(\lambda_1)}^{\lambda_1}, \underline{f}_1^{\lambda_2}, \ldots, \underline{f}_{a(\lambda_2)}^{\lambda_2}, \ldots, \underline{f}_1^{\lambda_k}, \ldots, \underline{f}_{a(\lambda_k)}^{\lambda_k}$$

come nel Teorema spettrale. Infatti, $n = \sum_{i=1}^{k} a(\lambda_i)$, quindi f è una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base è, per costruzione, di autovettori di A ed inoltre è ortonormale, dato che gli autospazi determinati sono a due a due ortogonali fra loro (cf. Proposizione 0.12.5) e dato che in ciascun autospazio abbiamo

usato nel punto (c) il procedimento di Gram-Schmidt per avere una base ortonormale in ciascuno degli autospazi.
(g) Per costruzione e dalla teoria generale, senza dover quindi fare alcun calcolo, sappiamo che la matrice A nella base f diventa la matrice D.
(h) Da ultimo, la matrice M che determina la congruenza tra la matrice A e la matrice D come in (g), i.e. $D = {}^tMAM$, è la matrice $M = M_{e\,f}$ cambiamento di base dalla base canonica e alla base (ordinata) f come nel punto (f).

Esempio 0.12.1. Sia data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo determinare esplicitamente una base ortonormale di autovettori di A data dal Teorema spettrale per portare A in forma diagonale. Notiamo che il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(T) = det\,(A - T\,I) = T^2 - 4T - 96.$$

Le soluzioni di $P_A(T) = 0$ sono $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = -8$. L'autovettore, relativo al primo autovalore $\lambda_1 = 12$, si determina considerando il sistema

$$\begin{cases} -5\alpha - 5\sqrt{3}\beta &= 0 \\ -5\sqrt{3}\alpha - 15\beta &= 0 \end{cases}$$

che fornisce l'autovettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, le cui coordinate sono espresse rispetto alla base canonica e. Poiché $\lambda_2 \neq \lambda_1$, da Proposizione 0.12.5, l'autovettore relativo all'altro autovalore $\lambda_2 = -8$ è sicuramente ortogonale a $\underline{v}$. Quindi, senza bisogno di calcolare direttamente l'autospazio V_{-8}, basta prendere un qualsiasi vettore $\underline{w}$ ortogonale a $\underline{v}$: questo sarà automaticamente un generatore di V_{-8}. La base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base f formata da

$$\underline{f}_1 = \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\,f}$ è pertanto

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

che è una matrice ovviamente ortogonale. Dalla teoria generale, senza dover fare necessariamente il calcolo fra matrici, in base f la matrice A sarà congruente per mezzo di M alla matrice

$$D := \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

dato che il primo versore di f era stato scelto a partire dall'autovettore relativo a $\lambda_1 = 12$ ed il secondo versore di f a partire dall'autovettore relativo a $\lambda_1 = -8$.