

Esercizi Riepilogativi relativi alle lezioni di: 13/02/06, 15/02/06 e 16/02/06

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento affine per  $\mathbb{R}^2$  con coordinate non-omogenee  $(x, y)$  ed un riferimento proiettivo per  $\mathbb{P}^2$ , con coordinate omogenee  $[x_0, x_1, x_2]$ .

**Esercizio 1:** In  $\mathbb{R}^2$  sia data la conica di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy + y + x = 0.$$

- (i) Determinare i punti impropri di  $\mathcal{C}$ ;
- (ii) Dedurre la classificazione affine e la forma canonica affine di  $\mathcal{C}$ ;
- (iii) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di  $\mathcal{C}$ , considerando  $\mathcal{C}$  contenuta nella carta affine (schermo)  $A_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$ .
- (iv) Dedurre la forma canonica proiettiva della chiusura proiettiva di  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 2:** In  $\mathbb{P}^2$  si consideri la conica proiettiva

$$\mathcal{D} : x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0.$$

- (i) Determinare la classificazione proiettiva di  $\mathcal{D}$ ;
- (ii) Scrivere le equazioni delle tre coniche dedotte da  $\mathcal{D}$  nelle tre differenti carte affini (schermi) di  $\mathbb{P}^2$ :  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  e stabilire la natura delle tre coniche.

**Esercizio 3:** Determinare l'equazione dell'unica conica non degenera di  $\mathbb{P}^2$  che passa per i 3 punti fondamentali, per il punto unita' e per il punto  $P = [1, 2, 3]$ .

**Esercizio 4:** Si considerino le coniche

$$\mathcal{C} : x_0^2 - x_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{D} : x_1x_2 = 0.$$

- (i) Determinare tutte le coniche degeneri del fascio generato da  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ .
- (ii) Trovare l'unica conica del fascio che passa per il punto  $[0, 1, 1]$ .