Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Magistrale in Matematica
Geometria Algebrica - A. A. 2018/19
Docente: Prof. Flaminio Flamini

Esercizi Proposti durante lo svolgimento del corso

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo unitario e sia $I \subset A$ un ideale proprio. Dimostrare che $\sqrt{I}$ e' un ideale radicale.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo unitario e sia $\underline{m} \subset A$ un ideale massimale di A. Dimostrare che $\underline{m}$ e' un ideale radicale.

Esercizio 3 Sia A un anello commutativo unitario e sia $\underline{p} \subset A$ un ideale primo di A. Dimostrare che $\underline{p}$ e' un ideale radicale.

Esercizio 4. In $A^{(2)} := \mathbb{R}[x, y]$ consideriamo i polinomi

$$f = (x+1)^2 + y^2 - 1 \quad g = (x-1)^2 + y^2 - 1.$$

(a) Determinare l'I.A.A. $Z_a(J) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$;
(b) verificare che $A^{(2)}/J$ non e' un anello ridotto;
(c) dedurre che J non e' un ideale radicale e calcolare $\sqrt{J}$.

Esercizio 5. Mostrare che, se $\mathbb{K}$ e' un campo finito, allora ogni sottoinsieme di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $n \geq 1$, e' un I.A.A.

Esercizio 6. In $A^{(3)} := \mathbb{R}[x, y, z]$ consideriamo l'ideale

$$I := (y - x^2,\ z - xy).$$

(a) Determinare l'I.A.A. $Z_a(I) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$;
(b) mostrare che l'anello quoziente $A^{(3)}/I$ e' un dominio integro;
(c) verificare che $xz - y^2 \in I$;
(d) posto $J := (y - x^2,\ xz - y^2)$, verificare che $Z_a(I) \subset Z_a(J)$ (inclusione stretta);
(e) mostrare che l'anello quoziente $A^{(3)}/J$ non e' un dominio integro.

Esercizio 7. Trovare un controesempio al principio di Study affine quando il campo $\mathbb{K}$ non e' algebricamente chiuso.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$; si consideri il piano affine $\mathbb{A}^2$ su $\mathbb{K}$ e lo si identifichi insiemisticamente con $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. Confrontare la topologia di Zariski $Zar_{a,2}$ su $\mathbb{A}^2$ con la topologia di Zariski prodotto $Zar_{a,1} \times Zar_{a,1}$, verificando che non coincidono e che una delle due topologie e' meno fine dell'altra.

Esercizio 9. Si determini un'ipersuperficie $Z_a(f) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che sia riducibile come I.A.A. ma il cui polinomio $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ sia un elemento irriducibile dell'anello.

Esercizio 10. Si consideri l'I.A.A. $Z_a(J) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, ove J e' l'ideale principale

$$J := (y^2 - xy - x^2y + x^3).$$

(a) Verificare che J non e' un ideale primo;
(b) Scrivere $Z_a(J) = Z_a(J_1) \cup Z_a(J_2)$, ove J_1, J_2 ideali primi propri di $A^{(2)} = \mathbb{R}[x, y]$ (in altri termini determinare le componenti irriducibili di $Z_a(J)$).

Esercizio 11. Sia $J = (xz - y^2,\ x^3 - yz) \subset \mathbb{R}[x, y, z]$.
(a) verificare che J non e' un ideale primo;
(b) determinare le componenti irriducibili dell'I.A.A. $Z_a(J) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Attenzione: nel testo degli esercizi successivi (salvo menzione contraria) tutto sara' supposto definito su $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero

Esercizio 12. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$, $n \geq 1$, un chiuso affine determinato da s punti distinti. Descrivere l'anello delle coordinate affini $A(S)$.

Esercizio 13. Sia data la conica proiettiva $Z_p(x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1)$. Determinare la classificazione affine delle coniche traccia nelle tre carte affini fondamentali di $\mathbb{P}^2$.

Esercizio 14. Si determini la chiusura proiettiva $\overline{X}^p$ di $X := Z_a(x, x^2 + y) \subset \mathbb{A}^2$, identificando $\mathbb{A}^2$ con l'aperto affine fondamentale U_0 di $\mathbb{P}^2$. Detti F_1 e F_2 gli omogeneizzati, rispettivamente, dei polinomi $f_1 = x$ e $f_2 = x^2 + y$, verificare che $\overline{X}^p \subset Z_p(F_1, F_2)$ (inclusione stretta). Spiegare perche'.

Esercizio 15. Determinare il cono affine (risp. proiettivo) in $\mathbb{A}^3$ (risp. $\mathbb{P}^3$) della conica proiettiva $C = Z_p(x_0x_1 - x_2^2)$.

Esercizio 16. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$, si consideri la *cubica gobba proiettiva* $C = Z_p((F_1, F_2, F_3))$, ove (come visto a lezione)

$$F_1 = x_0x_2 - x_1^2,\ F_2 = x_0x_3 - x_1x_2,\ F_3 = x_1x_3 - x_2^2 \in \mathcal{S}_2^{(3)}.$$

Sia $G = 2x_1x_2x_3 - x_2^3 - x_0x_3^2 = x_2F_3 - x_3F_2 \in \mathcal{S}_3^{(3)}$.
(i) Dimostrare che $C = Z_p((F_1, G))$.
(ii) Verificare infatti che $\sqrt{(F_1, G)} = (F_1, F_2, F_3)$.
(iii) Sia U_0^3 la carta affine di $\mathbb{P}^3$ a sia $C \cap U_0^3$ la cubica gobba affine in questa carta. Dopo aver verificato che

$$C \cap U_0^3 = Z_a(\delta_0(F_1),\ \delta_0(F_2)) = Z_a(\delta_0(F_1),\ \delta_0(G)),$$

stabilire che in ciascun punto p di $C \cap U_0^3$ le due (iper)superfici affini $Z_a(\delta_0(F_1))$ e $Z_a(\delta_0(F_2))$ ivi si incontrano *trasversalmente* (i.e. i rispettivi piani tangenti in p sono distinti e si incontrano in una retta per p), mentre le due (iper)superfici affini $Z_a(\delta_0(F_1))$ e $Z_a(\delta_0(G))$ ivi si *toccano* (i.e. i rispettivi piani tangenti in p coincidono)

Esercizio 17. Se X e Y sono due varieta' algebriche (i.e. quasi–proiettive) e $Y \subset X$, verificare che in generale Y non e' ne' aperta ne' chiusa in X.

Esercizio 18. Dimostrare che se X e' una varieta' quasi–proiettiva in $\mathbb{P}^n$ e se $Y \subset X$ e' un irriducibile e localmente chiuso in X, allora Y e' una una varieta' quasi–proiettiva in $\mathbb{P}^n$

Esercizio 19. Dimostrare che se X e Y sono varieta' quasi–proiettive in $\mathbb{P}^n$ e $Y \subset X$, allora Y e' localmente chiuso in X.

Esercizio 20. Siano X e Y due varieta' algebriche e sia $\phi : X \to Y$ un morfismo tra esse. E' sempre vero che ϕ e' un'applicazione aperta tra le due topologie di Zariski di X e di Y?

Esercizio 21. Dare un esempio di applicazione $\phi : X \to Y$ tra due varieta' algebriche che risulti essere un omeomorfismo ma non un isomorfismo.

Esercizio 22. Siano $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ due varieta' proiettive. E' vero che $S(X) \cong S(Y)$ come anelli graduati?

Esercizio 23. Trovare l'immagine mediante il morfismo di Veronese standard $\nu_{2,2}^{st} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$ della conica proiettiva $Z_p(x_0x_2 - x_1^2)$

Esercizio 24. Trovare l'immagine mediante il morfismo di Veronese standard $\nu_{2,3}^{st} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9$ della retta proiettiva $Z_p(x_2 - x_1)$ e della conica proiettiva $Z_p(x_0x_2 - x_1^2)$

Esercizio 25. Sia $\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ l'applicazione razionale definita da

$$\Phi([x_0, x_1, x_2]) = [x_1x_2,\ x_0x_2,\ x_0x_1].$$

(a) Determinare $Dom(\Phi)$;
(b) si descriva l'inversa razionale Φ^{-1}, determinando $Dom(\Phi^{-1})$;
(c) si deduca che Φ e' birazionale ma non un automorfismo;
(d) descrivere precisamente i luoghi di non regolarita' di Φ e di Φ^{-1};
(e) determinare eventuali curve contratte da Φ

Esercizio 26. Dimostrare che $\mathbb{P}^2 \setminus q$, ove q un punto di $\mathbb{P}^2$, e' una varieta' quasi-proiettiva che non puo' essere ne' proiettiva ne' affine.

Esercizio 27. Esibire una varieta' proiettiva che e' birazionale ma non isomorfa a $\mathbb{P}^2$.

Esercizio 28. Dimostrare che $X := Z_a(y_1y_2y_3 \cdots y_n - 1) \subset \mathbb{A}^n$ ($n \geq 2$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ coordinate affini in $\mathbb{A}^n$) e' birazionalmente equivalente a $\mathbb{A}^{n-1}$.

Esercizio 29. Sia V una varieta' algebrica e siano U_1 e U_2 due suoi aperti affini. Dimostrare che $U_1 \cap U_2$ e' un aperto affine di V.

Esercizio 30. (a) Dare un esempio di due varieta' affini (proiettive) di dimensione uno che sono birazionalmente equivalenti, ma non isomorfe.
(b) Dare un esempio di due varieta' affini (proiettive) di dimensione due che sono birazionalmente equivalenti, ma non isomorfe.
(c) Dare un esempio di due varieta' affini (proiettive) di dimensione tre che sono birazionalmente equivalenti, ma non isomorfe.

Esercizio 31. Sia $C \subset \mathbb{A}^3$ la curva individuata dall'unione dei tre assi coordinati. Dimostrare che C non puo' essere isomorfa ad una curva piana affine.

Esercizio 32. Sia data la curva piana affine $C := Z_a(x^3+x^2-y^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Si dimostri che C e' una curva razionale e se ne individui una sua parametrizzazione razionale complessa. Si determini infine in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ una desingolarizzazione di C.

Esercizio 33. Sia $\Psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ l'applicazione razionale definita da

$$\Psi([x_0, x_1, x_2]) = [x_0x_1,\ x_0x_2,\ x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2].$$

(a) Determinare $U := Dom(\Psi)$;
(b) posto $Y := \overline{\Psi(U)} \subset \mathbb{P}^4$, si dimostri che Ψ ammette un'inversa regolare (i.e. un morfismo) $\psi^{-1} : Y \to \mathbb{P}^2$;
(c) ψ^{-1} coincide con lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto?