Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VIII Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Sia dato l'endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

• Ker(f) e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

• preso il vettore $\underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$, allora

$$f(\underline{w}) = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2.$$

(i) Stabilire che esiste una base $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^3$ costituita da **autovettori** dell'endomorfismo f, specificando precisamente rispetto a quali **autovalori** essi risultano essere autovettori.

(ii) Determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f in base $\mathcal{B}$, i.e. scrivere la matrice $D := M_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**), osservando che $D = M_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**) risulta una matrice diagonale.

(iii) Calcolare il polinomio caratteristico $P_D(x)$ di $D = M_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**), riconoscendo i suoi coefficienti in termini di traccia e determinante di $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**).

(iv) Scrivere la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f in base canonica $\mathcal{E}$, i.e. scrivere la matrice $A := M_{\mathcal{E},\,\mathcal{E}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**), come coniugata della matrice $D = M_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}(f)$, utilizzando opportunamente i diagrammi commutativi di applicazioni lineari in differenti basi e la matrice cambiamento di base $M := M_{\mathcal{E},\,\mathcal{B}}$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**).

(v) Dedurre l'espressione di $f(\underline{e}_i)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{E}$, per ogni $1 \leq i \leq 3$.

(vi) Calcolare il polinomio caratteristico $P_A(x)$ di $A = M_{\mathcal{E},\,\mathcal{E}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**), riconoscendo i suoi coefficienti in termini di traccia e determinante di $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**) e riconoscendo che $P_A(x) = P_D(x)$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ed il corrispettivo endomorfismo $L_A \in End(\mathbb{R}^2)$.

(i) Verificare che $\lambda = \frac{1}{2}$ e' un autovalore della matrice A.

(ii) Determinare equazioni cartesiane ed una base dell'**autospazio** $V_{\frac{1}{2}}(L_A)$ relativo all'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$.

(iii) Verificare che $\lambda = 1$ e' un altro autovalore della matrice A.

(iv) Determinare equazioni cartesiane ed una base dell'**autospazio** $V_1(L_A)$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

(v) Dedurre:
- che L_A non ammette altri autovalori all'infuori di 1 e $\frac{1}{2}$,
- che la matrice A e' diagonalizzabile,
- la decomposizione di $\mathbb{R}^2$ in somma diretta di autospazi di L_A

(vi) Denotato con $\mathcal{V}$ il sistema di vettori ottenuto dall'unione dei vettori della base dell'**autospazio** $V_{\frac{1}{2}}(L_A)$ e di quelli della base dell'**autospazio** $V_1(L_A)$, determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo L_A in base $\mathcal{V}$, ossrvando che si ottiene una matrice diagonale D cui la matrice A e' coniugata. Dedurre inoltre una matrice M che dia la relazione di coniugio tra A e D, i.e. per cui valga $D = M^{-1}AM$.

(vii) Considerata la base $\mathcal{V}'$, ottenuta permutando fra loro i vettori della base $\mathcal{V}$, determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo L_A in base $\mathcal{V}'$, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{V}',\,\mathcal{V}'}(L_A)$ (**Notazione di GEOMETRIA 1, Sernesi**).

(viii) Verificare esplicitamente che e.g. $\lambda = 2$ non puo' essere un ulteriore autovalore di A.

(ix) Utilizzando quanto calcolato precedentemente, scrivere esplicitamente l'espressione di A^n, dove n un qualsiasi intero positivo.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici quadrate reali di ordine due

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire quali fra esse e' l'unica matrice diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(ii) Spiegare per quali motivi le due matrici residue non sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$.
(iii) Quali delle due non diagonalizzabili su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e' invece diagonalizzabile su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?