Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VIII Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica $\mathcal{E}^3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, sia data $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in se' (o endomorfismo di $\mathbb{R}^3$) definita nel modo seguente:

$$\varphi(\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3, \;\; \varphi(2\underline{e}_1) = \underline{e}_2, \;\; \varphi(\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 + 6\underline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_{\mathcal{E}^3,\, \mathcal{E}^3}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**), che rappresenta l'endomorfismo φ nella base canonica $\mathcal{E}^3$ sia nel dominio ($\mathbb{R}^3$) che nel codominio ($\mathbb{R}^3$) di φ.
(ii) Determinare le dimensioni dei sottospazi $Ker(\varphi)$ ed $Im(\varphi)$.
(iii) Determinare una base di $Ker(\varphi)$ ed una di $Im(\varphi)$, esprimendo i vettori di queste due basi in coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}^3$.
(iv) Dopo aver determinato equazioni parametriche e cartesiane di $Ker(\varphi)$, nelle coordinate $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ indotte dalla base canonica $\mathcal{E}^3$, si considerino i vettori linearmente indipendenti

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

espressi in coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}^3$. Verificare che tali vettori formano una base per un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che si abbia $\mathbb{R}^3 = W \oplus Ker(\varphi)$ (W si dice **un sottospazio supplementare** in $\mathbb{R}^3$ al sottospazio $Ker(\varphi)$).
(v) Sia $\mathcal{V}$ la base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta unendo ordinatamente la base di $Ker(\varphi)$ determinata al punto (iii) e la base di W determinata al punto (iv). Determinare in almeno due modi distinti (uno dei quali utilizzi i diagrammi commutativi di applicazioni) la matrice $B := M_{\mathcal{V},\, \mathcal{V}}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) rappresentativa di φ in base $\mathcal{V}$ usata sia nel dominio ($\mathbb{R}^3$) che nel codominio ($\mathbb{R}^3$) di φ. Osservare che $rg(A) = rg(B)$ e spiegare in modo intrinseco le motivazioni di questa uguaglianza.
(vi) Denotate con $\underline{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ le coordinate indotte su $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{V}$, determinare le formule del cambiamento di coordinate che esprimono $\underline{x}$ in funzione di $\underline{y}$ e determinare inoltre le equazioni cartesiane di $Im(\varphi)$ nelle coordinate $\underline{y}$.
(vii) Determinare equazioni parametriche di $Im(\varphi)$ nelle coordinate $\underline{y}$ indotte su $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{V}$.
(viii) Determinare in almeno due modi distinti (uno dei quali utilizzi i diagrammi commutativi di applicazioni) la matrice $C := M_{\mathcal{E}^3,\, \mathcal{V}}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) rappresentativa di φ quando nel dominio ($\mathbb{R}^3$) di φ si usa la base $\mathcal{V}$ mentre

nel codominio di φ ($\mathbb{R}^3$) si usa la base canonica $\mathcal{E}^3$. Osservare che $rg(C) = rg(B)$ e spiegare in modo intrinseco le motivazioni di questa uguaglianza.

Esercizio 2 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

dove $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ denotano le coordinate indotte su $\mathbb{R}^4$ dalla base canonica $\mathcal{E}^4$.

(i) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^4}(f)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) che rappresenta l'applicazione lineare f nelle rispettive basi canoniche $\mathcal{E}^4$ del dominio $\mathbb{R}^4$ di f ed $\mathcal{E}^3$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di f.
(ii) Stabilire se l'applicazione lineare f e' suriettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Im(f) \subset \mathbb{R}^3$ nelle coordinate date dalla base $\mathcal{E}^3$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di f.
(iii) Estendere la base di $Im(f)$ trovata in (ii) ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e trovare la matrice cambiamento di base $M := M_{\mathcal{E}^3,\, \mathcal{B}}$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) che esprime i vettori di $\mathcal{B}$ in coordinate rispetto ad $\mathcal{E}^3$.
(iv) Stabilire se f e' iniettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Ker(f) \subset \mathbb{R}^4$ nelle coordinate date dalla base $\mathcal{E}^4$ del dominio $\mathbb{R}^4$ di f.
(v) Estendere la base di $Ker(f)$ trovata in (iv) ad una base $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ e trovare la matrice cambiamento di base $N := M_{\mathcal{E}^4,\, \mathcal{K}}$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) che esprime i vettori di $\mathcal{K}$ in coordinate rispetto ad $\mathcal{E}^4$.
(vi) Determinare equazioni cartesiane di $Im(f)$ nelle coordinate indotte su $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{B}$.
(vii) Determinare equazioni cartesiane di $Ker(f)$ nelle coordinate indotte su $\mathbb{R}^4$ dalla base $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano U_1 e U_2 due $\mathbb{K}$ **sottospazi vettoriali supplementari** in V nel senso di Esercizio 1, cioe' $V = U_1 \oplus U_2$. Si denotino con

$$\Pi_{U_1} : V \to V \;\text{ e }\; \Pi_{U_2} : V \to V$$

le applicazioni cosi' definite:
per ogni $V \ni \underline{v} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$, dove $\underline{u}_1 \in U_1$ e $\underline{u}_2 \in U_2$ univocamente determinati da $\underline{v}$, si ha

$$\Pi_{U_1}(\underline{v}) := \underline{u}_1 \;\text{ e }\; \Pi_{U_2}(\underline{v}) := \underline{u}_2.$$

(i) Verificare che Π_{U_1} e' un endomorfismo di V. Questo endomorfismo e' detto **endomorfismo di proiezione sul sottospazio U_1 parallelamente al sottospazio U_2**.
(ii) Verificare che Π_{U_2} e' un endomorfismo di V. Questo endomorfismo e' detto **endomorfismo di proiezione sul sottospazio U_2 parallelamente al sottospazio U_1**.

(iii) Verificare le seguenti eguaglianze di endomorfismi di V

$$\Pi_{U_1} + \Pi_{U_2} = Id_V \,,\ \Pi_{U_1} \circ \Pi_{U_2} = O = \Pi_{U_2} \circ \Pi_{U_1} \,,\ \Pi_{U_1} \circ \Pi_{U_1} = \Pi_{U_1} \,,\ \Pi_{U_2} \circ \Pi_{U_2} = \Pi_{U_2} \,.$$

(iv) Determinare $Im(\Pi_{U_1})$ e $Ker(\Pi_{U_1})$.
(v) Determinare $Im(\Pi_{U_2})$ e $Ker(\Pi_{U_2})$.

Esercizio 4 Si consideri nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con coordinate $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ indotte dalla base canonica $\mathcal{E}^3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, il sottospazio vettoriale

$$U := Sol(x_1 - x_2 + x_3 = 0)$$

ed il sottospazio

$$W = Span\{\underline{w} := \underline{e}_1 - \underline{e}_2\}.$$

(i) Determinare una base di U e verificare che U e W sono **sottospazi supplementari** in $\mathbb{R}^3$.
(ii) Denotata con $\mathcal{B}$ la base ottenuta considerando ordinatamente i vettori della base di U determinati al punto (i) e poi il vettore $\underline{w}$, determinare la matrice cambiamento di base $M := M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{B}}$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) che esprime i vettori di $\mathcal{B}$ in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^3$.
(iii) Denotato con $P = \Pi_W$ l'**endomorfismo** di $\mathbb{R}^3$ di **proiezione sulla retta vettoriale W parallelamente al piano vettoriale** U, nel senso di Esercizio 3, determinare la matrice rappresentativa A dell'endomorfismo P quando si considera la base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio di P, i.e. $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(P)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**).
(iv) Determinare la matrice B rappresentativa dell'endomorfismo P quando si considera la base $\mathcal{B}$ nel dominio di P e la base $\mathcal{E}^3$ nel codominio di P, i.e. $B = M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{B}}(P)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**).
(v) Determinare la matrice C rappresentativa dell'endomorfismo P quando si considera la base $\mathcal{E}^3$ sia nel dominio che nel codominio di P, i.e. $C = M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^3}(P)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**).
(vi) Dopo aver verificato che $rg(C) = 1$, dare una motivazione intrinseca in termini di P che spieghi questa uguaglianza.