Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VI Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $L_A \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa e':

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando opportunamente la definizione di determinate, rispondere ai seguenti quesiti.
(i) Stabilire che L_A non e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare dimensione ed equazioni parametriche di $Im(L_A)$.
(iii) Utilizzando esclusivamente i determinanti, determinare equazioni cartesiane di $Im(L_A)$.
(iv) Determinare dimensione di $Ker(L_A)$ e dedurre equazioni cartesiane di $Ker(L_A)$.
(v) Determinare equazioni parametriche di $Ker(L_A)$.
(vi) Utilizzando le equazioni parametriche trovate al punto (v) ed opportunamente la nozione del determinante, dedurre le equazioni cartesiane di $Ker(L_A)$ da quelle parametriche.

Esercizio 2. Sia assegnata la matrice parametrica

$$A := \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ b-1 & b & b+1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}),$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$ parametri interi.
(i) Senza svolgere il calcolo diretto di $\det(A)$, ma utilizzando esclusivamente le proprieta' del determinante come funzione **multilineare alterna** (o antisimmetrica) nelle righe o nelle colonne di A, verificare che $\det(A)$ e' un multiplo intero di $ab \in \mathbb{Z}$.
(ii) Dallo svolgimento al punto (i), determinare con il metodo di Laplace il valore esplicito di $\det(A)$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Siano dati i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x^2,\ p_2(x) = 2 - x, p_3(x) = 2 \in V.$$

(i) Utilizzando opportunamente la nozione di determinante, stabilire che i polinomi dati costituiscono una base $\mathcal{B}$ per V.
(ii) Utilizzando tutte le regole note per determinare le matrici inverse di matrici invertibili, determinare le coordinate del polinomio $q(x) = 1 + x \in V$ rispetto alla nuova base $\mathcal{B}$.
(iii) Utilizzando il metodo di Cramer, determinare le coordinate del polinomio $q(x) = 1 + x \in V$ rispetto alla nuova base $\mathcal{B}$.