Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

V Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la famiglia (dipendente dal parametro h) di sistemi lineari non omogenei $SL(3,3)$ aventi per matrice completa la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 & 1-h \\ 0 & 1 & 1-h & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Detta A la relativa matrice dei coefficienti, determinare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, il rango di A e di C esibendo, in ciascun caso, delle sottomatrici quadrate invertibili di ordine uguale al rango determinato.
(ii) Utilizzando il teorema di Rouche-Capelli, stabilire per quali valori del parametro h otteniamo sistemi compatibili ed, in caso di compatibilita', descrivere esplicitamente le espressioni di tutte le soluzioni dei sistemi compatibili.
(iii) Posto $\underline{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1-h \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ il vettore dei termini noti, interpretare $Sol(A\underline{x} = \underline{c})$ come sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$, determinando la sua dimensione, e stabilire per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine $Sol(A\underline{x} = \underline{c})$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
(iv) Interpretare le risposte date in (i), (ii) e (iii) in termini dell'endomorfismo $L_A \in End(\mathbb{R}^3)$ e dell'insieme delle controimmagini $\overleftarrow{L_A}(\underline{c})$.

Esercizio 2. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate nel campo $\mathbb{R}$. Siano date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in V.$$

Si consideri infine il sottospazio vettoriale $U := Span\{A_1, A_2, A_3\} \subset V$.
(i) Determinare dimensione ed una base di U.
(ii) Sia dato $W := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \mid a_{11} + a_{12} + 2a_{21} = 0 \right\}$. Dopo aver verificato che W e' un sottospazio di V, determinare dimensione ed una base di $U \cap W$.
(iii) Determinare la dimensione di $U + W$ e stabilire se U e W sono in somma diretta in V.
(iv) Considerato un parametro $t \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di matrici

$$\left\{ B_t := \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Si interpreti questa famiglia come un sottospazio affine $\mathcal{L}$ di V (nella naturale struttura di spazio affine di V) e si dica per quali valori $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio affine $\mathcal{L}$ interseca il sottospazio vettoriale U di V.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x_1, x_2, x_3) rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Si doti $\mathbb{R}^3$ della naturale struttura di spazio affine. Si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{L} := \mathrm{Sol}\left(\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 3 \end{array} \right. \right) \subset \mathbb{R}^3$$

ed il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$

$$r: \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Riconoscere che $\mathcal{L}$ e' un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$, scrivendolo esplicitamente nella forma

$$p + W,$$

dove W opportuno sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ detto **giacitura** del sottospazio affine $\mathcal{L}$, e p **punto** appartenente al sottospazio affine $\mathcal{L}$. Dedurre quindi la dimensione del sottospazio affine $\mathcal{L}$.
(ii) Stabilire la mutua posizione dei sottospazi affini $\mathcal{L}$ e r in $\mathbb{R}^3$.
(iii) Determinare dimensione, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane del minimo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contiene il sottospazio affine $\mathcal{L}$ e che e' parallelo alla giacitura del sottospazio affine r.

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia $\varphi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$\varphi(A) = A \circ X - X \circ A,$$

dove $X := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ e dove $\circ$ denota l'usuale prodotto righe per colonne in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
(i) Verificare che φ e' un applicazione lineare.
(ii) Determinare le immagini mediante φ dei vettori della base canonica di $M_{2,2}(\mathbb{R})$, deducendo che φ non puo' essere iniettiva.
(iii) Determinare dimensione ed una base di $Im(\varphi)$.
(iv) Determinare dimensione ed una base di $Ker(\varphi)$.