Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

IV Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 11 & 14 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata.
(i) Stabilire che L_A non puo' essere iniettiva. Determinare inoltre $\dim(Ker(L_A))$, una base di $Ker(L_A)$, equazioni parametriche e cartesiane di $Ker(L_A)$ rispetto alle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) indotte dalla base canonica nel dominio di L_A.
(ii) Stablire se L_A e' suriettiva e determinare una base per $Im(L_A)$.
(iii) Stabilire se esiste una matrice $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al piu' 2. Sia data l'applicazione $\varphi : V \to V$ definita dalla condizione

$$\varphi(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2) = (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2\, x^2.$$

(i) Verificare che l'applicazione φ é un'applicazione lineare.
(ii) Stabilire se φ é un'applicazione lineare iniettiva, altrimenti determinare $\dim(Ker(\varphi))$, una base di $Ker(\varphi)$ ed equazioni cartesiane e parametriche rispetto alle coordinate date in V dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$.
(iii) Stabilire se φ é un'applicazione lineare suriettiva. Determinare $\dim(Im(\varphi))$ e, se possibile, equazioni cartesiane e parametriche rispetto alle coordinate date in V dalla base canonica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$.
(iv) Stabilire se φ é un **isomorfismo** di V in se stesso, equivalentemente un **automorfismo** di V.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare $\dim(Im(L_A))$.
(ii) Determinare una base di $Im(L_A)$ ed equazioni sia parametriche che cartesiane di $Im(L_A)$ nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) individuate dal riferimento canonico $\mathcal{E}$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di L_A.
(iii) Determinare $\dim(Ker(L_A))$.

(iv) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di $Ker(L_A)$ nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) individuate dal riferimento canonico $\mathcal{E}$ nel dominio $\mathbb{R}^3$ di L_A e determinare una base di $Ker(L_A)$.
(v) Considerati i vettori $\mathbf{z} := \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{w} := 3\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$ nel codominio di φ, determinare l'**insieme delle controimmagini** dei vettori dati, i.e.

$$\overset{\leftarrow}{\varphi}(\mathbf{z}) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{z}\}$$

e

$$\overset{\leftarrow}{\varphi}(\mathbf{w}) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Esercizio 4. Dato un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

definiamo formalmente la sua **derivata prima** il polinomio

$$p'(x) := a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots n a_n x^{n-1} \in \mathbb{R}[x].$$

(i) Quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali e' lineare?
(a) $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$, $\varphi(p(x)) := 2p(5) + p'(2)$
(b) $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$, $\phi(p(x)) := \begin{pmatrix} 2p(5) + p'(2) \\ p(0) + 3 \end{pmatrix}$.
(c) $\psi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\psi(A) = AA^t$.
(ii) Per le applicazioni al punto (i) che risultano essere lineari, quali fra esse sono iniettive? Quali fra esse sono suriettive?
(iii) Per le applicazioni al punto (i) che risultano essere lineari, quali sono le immagini dei vettori della base canonica del dominio? Le immagini di questi vettori rimangono linearmente indipendenti?
(iv) Per le applicazioni al punto (i) che risultano essere lineari, determinare la dimensione delle immagini dei sottospazi coordinati propri del dominio.