Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

III Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$, nell'indeterminata x e di grado al piu' 3. Sia dato il sistema di vettori:

$$\mathcal{S} := \{1 - x,\ 1 + x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ x + x^2,\ 1 + x^2 + x^3\}.$$

(i) Stabilire che $\mathcal{S}$ non e' un sistema di vettori linearmente indipendenti.
(ii) Utilizzando l'algoritmo di estrazione, verificare che si puo' determinare una base $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ per V.
(iii) Dall'algoritmo utilizzato al punto (ii), trovare esplicitamente relazioni di dipendenza tra i vettori di $\mathcal{S}$ stabilendo quale tra i vettori appartiene allo Span dei precedenti.
(iv) Preso il polinomio $p(x) = 10 - 7x - x^2 + x^3 \in V$, determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (ii).

Esercizio 2. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate nel campo $\mathbb{R}$.
(i) Sia $Tsup_{2,2}$, rispettivamente $Tinf_{2,2}$, il sottospazio vettoriale di V delle matrici **triangolari superiori**, rispettivamente **triangolari inferiori**. Determinare una base per $Tsup_{2,2}$ ed una per $Tinf_{2,2}$.
(ii) Verificare che $V = Tsup_{2,2} + Tinf_{2,2}$ ma che la somma non e' diretta, descrivendo esplicitamente $Tsup_{2,2} \cap Tinf_{2,2}$.
(iii) Cosiderato la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in V$, determinare tutte le possibili scritture di A come vettore somma in $Tsup_{2,2} + Tinf_{2,2}$.
(iv) Siano invece $Sym_{2,2}$, rispettivamente $Antisym_{2,2}$, i sottospazi vettoriali di V delle **matrici simmetriche**, rispettivamente **antisimmetriche**. Dopo aver verificato che $V = Sym_{2,2} \oplus Antisym_{2,2}$, scrivere la matrice A in modo unico come vettore somma in $Sym_{2,2} \oplus Antisym_{2,2}$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano $U_1, \ldots, U_n$ dei sottospazi di V.
(i) Dimostrare che $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ se e solo se valgono $V = U_1 + \ldots + U_n$ e $U_i \cap \left(\bigoplus_{1 \leq j \neq i \leq n} U_j\right) = \emptyset$.
(ii) Si consideri ora $V = \mathbb{R}^4$ e siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

scritti in funzione della base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$. Detto $U_i := \mathrm{Span}\{\underline{v}_i\}$, $1 \leq i \leq 3$, verificare che U_1, U_2, U_3 sono sottospazi in somma diretta in $\mathbb{R}^4$.

(ii) Determinare una base per U_1 (rispettivamente per $U_1 \oplus U_2$) ed **equazioni parametriche** ed **equazioni cartesiane** di U_1 (rispettivamente di $U_1 \oplus U_2$), scritte rispetto alle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) determinate dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$.
(iii) Posto $U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, determinare una base $\mathcal{B}_U$ per U ed **equazioni parametriche** ed **equazioni cartesiane** di U scritte rispetto alle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) determinate dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$.
(iv) Con algoritmo di estensione, estendere la base $\mathcal{B}_U$ di U trovata al punto (iii) ad una base $\mathcal{F}$ per $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{E} := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ la sua **base canonica**. Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro reale e siano assegnati i seguenti vettori parametrici:

$$\underline{u}_{1,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{u}_{2,t} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix},\ \underline{v}_{1,t} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \underline{v}_{2,t} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix},$$

scritti in funzione della base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$. Si considerino, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le famiglie di sottospazi vettoriali

$$U_t := \mathrm{Span}\{\underline{u}_{1,t},\ \underline{u}_{2,t}\} \ \text{ e } \ V_t := \mathrm{Span}\{\underline{v}_{1,t},\ \underline{v}_{2,t}\},\ t \in \mathbb{R}$$

ed il vettore $\underline{z} = \underline{e}_1 - \underline{e}_3$.
(i) Stabilire se esiste $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$.
(ii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) = 1$.
(iii) Determinare **equazioni parametriche** e **cartesiane** di $U_1 \cap V_1$, scritte in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$.
(iv) Determinare la dimensione di $U_1 + V_1$, stabilendo se la somma e' diretta, e determinare **equazioni parametriche** e **cartesiane** di $U_1 + V_1$, scritte in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$.
(v) Determinare una base di $U_1 + V_1$ ed estendere la base determinata ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.
(vi) Determinare le coordinate del vettore $\underline{z} \in \mathbb{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ determinata al punto (v).