**Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"**
**Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023**
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

**II Foglio Esercitazioni**

**Esercizio 1.** Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Indicate con $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ indeterminate su $\mathbb{R}^4$, si consideri il seguente sistema lineare omogeneo $SLO(3, 4; \mathbb{R})$ di 3 equazioni nelle 4 indeterminate:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

(i) Scrivere la matrice $A$ dei coefficienti del sistema lineare $SLO(3, 4; \mathbb{R})$ dato e scrivere il sistema lineare dato in notazione matriciale utilizzando il prodotto righe per colonne fra matrici e l'eguaglianza fra matrici.
(ii) Attraverso l'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan, ridurre il sistema dato in un sistema lineare a gradini che sia equivalente al sistema di partenza.
(iii) Determinare l'espressione della soluzione generale del $SLO(3, 4; \mathbb{R})$ originario, stabilendo il numero di parametri liberi da cui dipende tale espressione.
(iv) Si denoti con $U$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ costituito dall'insieme delle soluzioni del $SLO(3, 4; \mathbb{R})$ originario. Scrivere $U$ come Span di un sistema finito di vettori di $\mathbb{R}^4$.
(v) Presi i vettori canonici $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio $W = Span\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e_3}\} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e_3} \rangle$. Determinare l'espressione del vettore generale in $W$ ed un sistema lineare omogeneo che definisca il sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^4$.
(vi) Determinare un sistema lineare omogeneo che definisca il sottospazio $U \cap W$ e trovare l'espressione del vettore generale in $U \cap W$.

**Esercizio 2.** Si considerino le matrici

$$A = (1\ 2\ 3), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire quali prodotti righe per colonne sono definiti ed, in caso di risposta affermativa, calcolare la matrice prodotto.
(ii) Determinare la matrice $A \cdot A^t$ e la matrice $A^t \cdot A$.
(iii) Verificare che in $M(2 \times 2; \mathbb{R})$ il prodotto righe per colonne

- (iii-1) non e' commutativo,
- (iii-2) ammette *zero-divisori* (i.e. esistono matrici $A, B \neq O$ tali che o $A \cdot B = O$ oppure $B \cdot A = O$)
- (iii-3) ammette elementi *nilpotenti* (i.e. esistono matrici $A \neq O$ tali che $A^n = O$ per qualche intero positivo $n \geq 2$).

**Esercizio 3.** Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri il sistema lineare non omogeneo $SL(3,3;\mathbb{R})$ dato da

$$\begin{cases} x + (a-1)y + (2-a)z & = & a+5 \\ x + ay + 2z & = & 4 \\ x + (a-2)y + 2(1-a^2)z & = & 6 \end{cases}$$

(i) Denotato con $\mathbf{x}$ il vettore colonna delle indeterminate e con $\mathbf{b}$ il vettore colonna dei termini noti, scrivere il $SL(3,3;\mathbb{R})$ in notazione matriciale.
(ii) Utilizzando l'eliminazione di Gauss-Jordan, ridurre il sistema dato ad un sistema equivalente a gradini
(iii) Studiare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la compatibilita' del $SL(3,3;\mathbb{R})$ dato ed, in caso di compatibilita', determinare l'espressione della soluzione generale del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

**Esercizio 4.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, in un'indeterminata $x$ e di grado al piu' 2. Si consideri il sottospazio

$$U := Span\{x,\ x^2\}$$

ed il sottoinsieme

$$W := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V \mid a_0 = 0 = a_1 - a_2\}.$$

(i) Determinare l'espressione del vettore generale in $U$.
(ii) Verificare che $W$ e' sottospazio di $V$ e determinare l'espressione del vettore generale in $W$.
(iii) Scrivere $W$ come Span di un opportuno sistema di generatori.
(iv) Determinare generatori del sottospazio $U \cap W$ e stabilire se sono linearmente indipendenti.
(v) Determinare generatori per il sottospazio $U + W$ e stabilire se sono linearmente indipendenti.
(vi) Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ elencare tutti gli elementi di $U$, di $W$, di $U \cap W$ e di $U + W$.