Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

I Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi e sia $\mathbf{z} := 1 + i \in \mathbb{C}$.

(i) Determinare $\mathbf{z}^{-1}$, i.e. l'inverso moltiplicativo di $\mathbf{z}$ in $\mathbb{C}$ e rappresentare nel piano di Argand-Gauss i numeri complessi $\mathbf{z}$, $\overline{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{z}^{-1}$.

(ii) Determinare i numeri complessi $\mathbf{z}^3$ e $\mathbf{z}^{-3}$.

(iii) Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ del polinomio $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \in \mathbb{R}[x]$.

Esercizio 2. Nell' $\mathbb{R}$–spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ stabilire quali dei sottoinsiemi sottoelencati hanno una struttura di $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale:

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \right\}$

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 7 \right\}$

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid xy = 0 \right\}$

(iv) $U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z - x^2 = 0 \right\}$

Esercizio 3. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{5} \\ -10 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \in M(3,3;\mathbb{Q})$.

(i) Determinare la matrice combinazione lineare di A e di A^t, a coefficienti $\frac{1}{2}$ e 4 rispettivamente.

(ii) Data la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(2,2;\mathbb{Q})$, stabilire se puo' esistere una matrice $C \in M(2,2;\mathbb{Q})$ per cui, la combinazione lineare $3B + 2C$ delle matrici B e C con coefficienti 2 e 3 rispettivamente, possa dare la matrice nulla, i.e. se puo' valere $3B + 2C = O$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo e si consideri il $\mathbb{K}$–spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi, a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ e nell'indeterminata x. Si consideri il sottoinsieme

$$W := \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \,|\, p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{K}[x].$$

(i) Stabilire se W e' un $\mathbb{K}$–sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.

(ii) In caso di risposta affermativa, W e' un $\mathbb{K}$–sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}[x]$?

(iii) Preso $\mathbb{K}[x]_{\leq 4}$, che e' il sottoinsieme di $\mathbb{K}[x]$ formato dai polinomi di grado al piu' 4, verificare dapprima che $\mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ e' sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$; in seguito dimostrare che $W \cap \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ e' anch'esso un $\mathbb{K}[x]$–sottospazio di $\mathbb{K}[x]$, determinando l'espressione del generico polinomio che appartiene al sottospazio $W \cap \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$.

(iv) Stabilire se $W \cup \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ e' anch'esso un $\mathbb{K}$–sottospazio di $\mathbb{K}[x]$.

Esercizio 5. Sia $V = M(n \times n, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate ad elementi nel campo $\mathbb{R}$. Denotiamo con

$$Sym_n := \{A \in V \mid A^t = A\}$$

che e' un sottoinsieme di V detto **sottoinsieme delle matrici simmetriche di ordine** n. Analogamente, denotiamo con

$$Antisym_n := \{A \in V \mid A^t = -A\}$$

che e' un sottoinsieme di V detto **sottoinsieme delle matrici antisimmetriche di ordine** n.

(i) Dimostrare che Sym_n ed $Antisym_n$ hanno una struttura di sottospazi vettoriali propri di V

(ii) Dimostrare che $Antisym_n \cap Sym_n = \{O\}$, dove O denota la matrice quadrata nulla.

(iii) Dimostrare che ogni matrice quadrata $M \in V$ si scrive in **modo unico** come combinazione lineare di un elemento di Sym_n e di un elemento di $Antisym_n$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia

$$\Phi : \mathbb{K}[x] \to Funz(\mathbb{K}, \mathbb{K})$$

l'applicazione tra spazi vettoriali che associa al polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ la funzione polinomiale

$$p : \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$

definita da:

$$a \xrightarrow{p} p(a), \ \forall \ a \in \mathbb{K}.$$

(i) Dimostrare che se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, allora Φ e' una applicazione iniettiva.
(ii) Verificare che, se invece $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, allora Φ non può essere iniettiva.