Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

XII Foglio Esercitazioni - Riepiloghi pre-esonero

Esercizio 1. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale munito della base canonica $\mathcal{E}$. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito dalle seguenti condizioni:

(a) $\mathrm{Ker}(F)$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases},$$

ove le coordinate (x_1, x_2, x_3) sono quelle definite dalla scelta di $\mathcal{E}$;

(b) il numero reale $\lambda = 3$ e' un autovalore di F ed il relativo autospazio $V_3(F)$ ha sistema di generatori costituito dai vettori

$$\underline{v} = (1, 0, 1), \ \underline{w} = (1, 2, 3),$$

espressi per comodita' per riga ed in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$.

(i) Dedurre il polinomio caratteristico di F, stabilendo se l'endomorfismo F e' diagonalizzabile ed, in caso affermativo, determinare una base diagonalizzante $\mathcal{D}$ di F e la relativa forma diagonale D per F in tale base.
(ii) Determinare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E},\,\mathcal{E}}(F)$ (**Notazione Testo Sernesi -** $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$ **Notazione teoria in aula**) di F in base $\mathcal{E}$.
(iii) Determinare a relazione di coniugio (o similitudine) che sussiste tra $D = M_{\mathcal{D},\,\mathcal{D}}(F)$ (**Notazione Testo Sernesi -** $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(F)$ **Notazione teoria in aula**) e $M_{\mathcal{E},\,\mathcal{E}}(F)$ (**Notazione Testo Sernesi -** $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$ **Notazione teoria in aula**)..
(iv) Calcolare $F^2(2\overline{v} - 3\overline{w})$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V := M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e si denoti con $\mathcal{E}$ la sua base canonica formata dalle quattro matrici elementari $\{E_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq 2}$. Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in V$ e si consideri $L \in \mathrm{End}(V)$ definito da:

$$L(M) = A \circ M, \ \ \forall\, M \in V$$

ove $\circ$ usuale prodotto righe per colonne.
(i) Verificare che L e' diagonalizzabile determinando polinomio caratteristico di L, molteplicita' algebriche e geometriche di tutti gli autovalori di L, basi di tutti gli autospazi di L, equazioni cartesiane (nelle coordinate $\underline{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ su V date dalla scelta di $\mathcal{E}$) degli autospazi.
(ii) Determinare una base $\mathcal{D}$ diagonalizzante per L e determinare la matrice rappresentativa di L in base $\mathcal{D}$.
(iii) Denotate con $\underline{y} := (y_1, y_2, y_3, y_4)$ le coordinate su V individuate dalla scelta di $\mathcal{D}$, determinare la legge di trasformazione di coordinate $\underline{x} = M\underline{y}$ e contestualmente le equazioni cartesiane nelle coordinate $\underline{y}$ degli autospazi di L.

Esercizio 3. (i) Per ogni scelta del parametro $t \in \mathbb{R}$, discutere la diagonalizzabilita' dell'endomorfismo $L_{A_t} \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ associato alla matrice $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(ii) Per ogni scelta del parametro $t \in \mathbb{C}$, discutere la diagonalizzabilita' dell'endomorfismo di $L_{A_t} \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ associato alla matrice $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ t & 3 \end{pmatrix} M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{A} := \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine numerico reale, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathcal{E})$ e siano $\underline{x} = (x_1, x_2)$ le coordinate affini di questo riferimento. Si consideri la retta

$$r : \; x_1 - x_2 = 0,$$

descritta da equazione cartesiana rispetto alle coordinate del riferimento $RA(O, \mathcal{E})$.
(i) Determinare le equazioni di tutte le affinità f che hanno r come luogo fisso (ma non necessariamente luogo di punti fissi). Esibire inoltre alcuni esempi concreti di affinita' per cui $f(r) = r$ ma per cui r non sia luogo di punti fissi.
(ii) Tra le affinita' determinate in (i), determinare invece le equazioni di quelle che hanno r come luogo di punti fissi.
(iii) Considerato il punto $K = (1, 2)$, ove le coordinate sono rispetto $RA(O, \mathcal{E})$, e $\theta = \frac{\pi}{4}$, determinare le equazioni cartesiane della rotazione $R_{K,\theta}$ di angolo θ attorno al punto K ed i suoi punti fissi.
(iv) Determinare equazioni cartesiane nel riferimento $RA(O, \mathcal{E})$ della retta $R_{K,\theta}(r)$ ottenuta ruotando la retta r per mezzo della rotazione $R_{K,\theta}$.
(v) Nel fascio proprio di rette di centro il punto K, determinare l'equazione cartesiana dell'unica retta del fascio che:

(v.a) sia parallela alla retta $R_{K,\theta}(r)$
(v.b) passi per il punto $Q = (3, 1)$.