Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

XI Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. (i) Sia $\mathbb{K}$ un campo ed $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$. Sia f un'affinita' di $\mathbb{A}$ tale che f fissi due punti distinti $P \neq Q$ di $\mathbb{A}$, i.e.

$$f(P) = P \text{ e } f(Q) = Q.$$

Detta r la retta in $\mathbb{A}$ passante per P e Q, dimostrare che f fissa r punto per punto.
(ii) Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine numerico reale, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathcal{E})$ e siano $\underline{x} = (x_1, x_2)$ le coordinate affini di questo riferimento. Si consideri la retta r che, nel riferimento dato, abbia equazione cartesiana

$$r: \quad x_1 + x_2 = 1.$$

Determinare le equazioni di tutte le affinita' che fissano la retta r punto per punto.
(iii) Si considerino i punti $K = (1, 2)$ e $R = (2, 1)$, dove le coordinate sono date rispetto al riferimento in (ii). Tra le affinita' determinate in (i), determinare tutte quelle che trasformano K in R.
(iv) Determinare i punti fissi di tutte le affinita' determinate al punto (iii).

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A} := \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine numerico reale, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathcal{E})$ e siano $\underline{x} = (x_1, x_2)$ le coordinate affini di questo riferimento. Si consideri la seguente trasformazione

$$f(\underline{x}) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2 \\ 6x_1 - x_2 + 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire che f e' un'affinita' di $\mathbb{A}$.
(ii) Determinare equazioni parametriche ed equazione cartesiana per l'immagine tramite f della retta r passante per i punti $A = (2, 1)$ e $B = (3, 1)$, dove le coordinate sono date rispetto al riferimento canonico $RA(O, \mathcal{E})$.
(iii) Determinare l'equazione cartesiane per l'antiimmagine mediante f della retta s di equazione $3x_1 - 2x_2 + 7 = 0$.
(iv) Determina equazioni cartesiane dell'immagine tramite f della retta r di equazione cartesiana $2x_1 + 5x_2 - 3 = 0$.

Esercizio 3. Si consideri il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dotato di riferimento affine canonico $\mathcal{R}_{aff} := (O, \mathcal{E})$, dove O punto origine in questo riferimento, $\mathcal{E}$ la base canonica e $\underline{x} := (x_1, x_2)$ le coordinate affini in questo riferimento. Siano date le rette r e s che, nel riferimento affine $\mathcal{R}_{aff}$, hanno equazioni cartesiane rispettivamente:

$$r: \; x_1 - 1 = 0, \quad s: x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

(i) Nel fascio proprio di rette generato dalle rette r e s determinare la retta ℓ del fascio che è parallela alla retta t che, nel riferimento $\mathcal{R}_{aff}$, ha equazione cartesiana $x_2 = 2$.

(ii) Si considerino il punto $P = r \cap s$ ed i vettori $\underline{r} = (0,2)$ (un vettore direttore della retta r) e $\underline{s} = (1,1)$ (un vettore direttore della retta s). Si indichi con

$$\mathcal{R}'_{aff} := (P, \{\underline{r}, \underline{s}\})$$

il sistema di riferimento affine che ha:
• come origine O' il punto P
• come base associata $\mathcal{E}' := \{\underline{r}, \underline{s}\}$.
Sia $\underline{y} := (y_1, y_2)$ il corrispondente sistema di coordinate per $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ nel riferimento $\mathcal{R}'_{aff}$. Determinare l'equazione del cambiamento di coordinate affini che esprime le coordinate $\underline{y} = (y_1, y_2)$ del nuovo riferimento affine $\mathcal{R}'_{aff}$ in funzione delle coordinate (x_1, x_2) del vecchio riferimento affine $\mathcal{R}_{aff}$.

(iii) Considerata la retta ℓ trovata al punto (i), determinare la sua equazione cartesiana nelle coordinate $\underline{y} := (y_1, y_2)$ del riferimento $\mathcal{R}'_{aff}$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio affine numerico tridimensionale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, dotato di riferimento affine canonico $\mathcal{R}_{aff} := (O, \mathcal{E})$, dove O punto origine in questo riferimento, $\mathcal{E}$ la base canonica e $\underline{x} := (x_1, x_2, x_3)$ le coordinate affini in questo riferimento. Siano dati i seguenti punti, espressi in coordinate rispetto al riferimento $\mathcal{R}_{aff}$,

$$P = (1,2,0),\ P' = (2,-1,1),\ Q = (1,3,1),\ Q' = (3,-1,0).$$

Sia f un'affinita' di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ definita dalle seguenti condizioni:

$$f(P) = P',\ f(Q) = Q',\ \varphi_f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 + \underline{e}_3,\ \varphi(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 - \underline{e}_2,$$

dove $\varphi_f \in GL(3, \mathbb{R})$ l'automorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ individuato da f.
(i) Determinare le equazioni dell'affinita' f.
(ii) Determinare eventuali punti fissi di f.
(iii) Siano date le rette:
• r_1, passante per P e di vettore direttore $\overrightarrow{QQ'}$,
• r_1, passante per P' e di vettore direttore $3\,\overrightarrow{QQ'}$,
• s_1, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_2 &= 2 \\ x_3 &= 5 \end{cases}$
• s_2, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 &= 7 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{cases}$
Stabilire se l'affinita' f trasforma la coppia di rette (r_1, r_2) nella coppia di rette (s_1, s_2).