Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

X Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Si consideri la naturale struttura di spazio affine su V, denotata con $\mathbb{A}$. In altri termini, come insiemi $\mathbb{A} = V$, gli elementi di $\mathbb{A}$ vengono detti **punti** dello spazio affine $\mathbb{A}$ e V opera su $\mathbb{A}$ come gruppo di traslazioni.

Si consideri il punto $O \in \mathbb{A}$ come punto privilegiato detto **punto origine**, che coincida con il vettore nullo $\underline{0} \in V$ e si consideri una base $\mathcal{E}$ di V. La coppia $(O, \mathcal{E})$ individua un **riferimento affine** su $\mathbb{A}$, denotato con $RA(O, \mathcal{E})$; in altri termini, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, si considera il vettore $\overrightarrow{OP} \in V$ che, rispetto alla base $\mathcal{E}$ su V, ha coordinate $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix}$. Il riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ identifica $\mathbb{A}$ con lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, su cui opera come gruppo di traslazioni lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n \cong V$, l'ultimo isomorfismo dato dalla scelta della base $\mathcal{E}$ su V. In tale riferimento $RA(O, \mathcal{E})$ si dice che il punto $P \in \mathbb{A}$ ha coordinate affini $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ rispetto a tale riferimento affine. Si denoti con $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ la n-upla di coordinate affini su $\mathbb{A}$ indotte da $RA(O, \mathcal{E})$.

Siano ora $\mathcal{S}, \ \mathcal{T} \subset \mathbb{A}$ due sottospazi affini non vuoti di $\mathbb{A}$, tali che $\dim(\mathcal{S}) = s$, $\dim(\mathcal{T}) = t$ per cui $0 < s \leq t < n$. Rispetto a $RA(O, \mathcal{E})$, si abbia

$$\mathcal{S} = Sol(A\underline{x} = \underline{a}),$$

dove $A \in M_{(n-s)\times n}(\mathbb{K})$, $rg(A) = n - s$, $\underline{a} \in M_{(n-s)\times 1}(\mathbb{K})$ e

$$\mathcal{T} = Sol(B\underline{x} = \underline{b}),$$

dove $B \in M_{(n-t)\times n}(\mathbb{K})$, $rg(B) = n - t$, $\underline{b} \in M_{(n-t)\times 1}(\mathbb{K})$, i.e. $A\underline{x} = \underline{a}$ e' un sistema di **equazioni cartesiane in forma normale** del sottospazio affine $\mathcal{S}$ rispetto al riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ cosiccome $B\underline{x} = \underline{b}$ e' un sistema di **equazioni cartesiane in forma normale** del sottospazio affine $\mathcal{T}$ rispetto al riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$.

Denotiamo con

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in M_{(2n-s-t)\times n}(\mathbb{K})$$

la matrice ottenuta posizionando la matrice B dei coefficienti delle equazioni cartesiane di $\mathcal{T}$ sotto la matrice A dei coefficienti delle equazioni cartesiane di $\mathcal{S}$ e con

$$\begin{pmatrix} A & \underline{a} \\ B & \underline{b} \end{pmatrix} \in M_{(2n-s-t)\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

posizionando la matrice $(B\ \underline{b})$ completa delle equazioni cartesiane di $\mathcal{T}$ sotto la matrice $(A\ \underline{a})$ completa delle equazioni cartesiane di $\mathcal{S}$.

Dimostrare le seguenti asserzioni:

(i) $\mathcal{S}$ e' parallelo a $\mathcal{T}$ se e solo se $rg(A) = rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

(ii) $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sghembi se e solo se $rg(A) < rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} < rg\begin{pmatrix} A & \underline{a} \\ B & \underline{b} \end{pmatrix}$.

(iii) $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono incidenti (ma non impropriamente paralleli) se e solo se $rg(A) < rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} A & \underline{a} \\ B & \underline{b} \end{pmatrix}$ (ricordare che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ si dicono **impropriamente paralleli** se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, quindi $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{S}$).

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale n-dimensionale. Usando terminologia e notazioni come in **Esercizio 1**, siano $P \neq Q \in \mathbb{A}$ due punti distinti dello spazio affine che, rispetto al riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$, abbiano coordinate

$$P := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} \text{ e } Q := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare, rispetto al riferimento $RA(O, \mathcal{E})$, le coordinate del punto medio M del segmento $\overline{PQ}$

(ii) Denotata con $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ la n-upla di coordinate affini su $\mathbb{A}$ indotte da $RA(O, \mathcal{E})$, scrivere equazioni parametriche del segmento $\overline{PQ}$.

(iii) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r congiungente i punti P e Q, usando le coordinate affini $\underline{x}$ su $\mathbb{A}$ indotte da $RA(O, \mathcal{E})$, e determinare la giacitura di r.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$. Siano $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{A}$ due iperpiani affini non paralleli di $\mathbb{A}$.

Si chiama **fascio proprio di iperpiani definito da** $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ la totalita' di tutti gli iperpiani contenenti il sottospazio affine $(n-2)$-dimensionale $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Tale sottospazio affine viene detto **asse (o centro)** del fascio proprio di iperpiani, mentre il fascio proprio di iperpiani viene denotato con $\mathfrak{F}_{\mathcal{S}\cap\mathcal{T}}$.

Si chiama **fascio improprio di iperpiani definito da** $\mathcal{S}$, denotato con $\mathfrak{F}_{\mathcal{S}}$, la totalita' di tutti gli iperpiani paralleli all'iperpiano $\mathcal{S}$ in $\mathbb{A}$.

Si consideri ora $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, con coordinate affini $\underline{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento canonico $RA(O, \mathcal{E})$ (quindi $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ come spazio affine usuale).

(i) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta affine r, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed avente vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(ii) Determinare un vettore direttore ed equazioni parametriche della retta affine s, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ x + 2y - z & = & 0 \end{cases}$$

(iii) Determinare la mutua posizione di r e s in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

(iv) Stabilire se nel fascio proprio di piani $\mathfrak{F}_s$ di asse la retta affine s esiste un piano parallelo alla retta affine r ed, in caso di risposta affermativa, determinare l'equazione cartesiana di tale piano π.

(v) Nel fascio improprio $\mathfrak{F}_\pi$ di piani in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare l'unico piano α appartenente al fascio $\mathfrak{F}_\pi$ e passante per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(vi) Determinare equazioni cartesiane del fascio proprio di rette nel piano α di centro il punto Q.

Esercizio 4. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Sia dato l'endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

- $\mathrm{Ker}(f)$ e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana

$$x - y + z = 0.$$

- preso il vettore $\underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$, allora

$$f(\underline{w}) = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^3$ con la sua naturale struttura di spazio affine reale di dimensione 3, con riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ avente origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ coincidente con il vettore nullo, descrivere l'insieme delle controimmagini $\overleftarrow{f}(2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2)$ come sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$, determinandone equazioni parametriche e cartesiane.

(ii) Rispondere alla stessa domanda per l'insieme delle controimmagini $\overleftarrow{f}(\underline{e}_1)$.

(iii) Descrivere lo spazio affine $\mathbb{R}^3 = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ come unione disgiunta di sottospazi affini **propriamente paralleli** (i.e. paralleli ma non coincidenti) della forma $\overleftarrow{f}(\underline{z})$, al variare del vettore $\underline{z}$ in $Im(f)$.