Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

IX Foglio Esercitazioni

Esercizio. Siano dati gli spazi vettoriali numerici $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica

$$\mathcal{E}^3 = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\},$$

e $\mathbb{R}^2$, munito della base canonica

$$\mathcal{E}^2 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

(N.B. LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$ SI E' SCRITTA CON LE LETTERE $\underline{c}_i$ PER NON FAR CONOFONDERE I SUOI PRIMI DUE VETTORI CON LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$).

Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ il vettore arbitrario delle coordinate di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}^3$. Al variare di un parametro $t \in \mathbb{R}$, si consideri la collezione di applicazioni lineari

$$f_t \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2),$$

dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{R}$, definite da

$$f_t(\underline{x}) = f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + tx_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare per quale unico valore $t = t_0$ del parametro $t \in \mathbb{R}$ si abbia $\dim(Im(f_{t_0})) = 1$ e, per tale valore $t = t_0$, scrivere la matrice rappresentativa di f_{t_0} nelle basi canoniche di dominio e codominio, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^2}(f_{t_0})$.

(ii) Per il valore di $t = t_0$ determinato al punto (i), determinare una base per $Im(f_{t_0})$ ed una base per $Ker(f_{t_0})$.

(iii) Denotati con $\underline{w}$ il vettore della base di $Im(f_{t_0})$ scelto al punto (i) e con $\underline{b_1}, \underline{b_2}$ i vettori della base di $Ker(f_{t_0})$ sempre individuata al punto (i), aggiungere al sistema di vettori indipendenti $\{\underline{b_1}, \underline{b_2}\}$ di $\mathbb{R}^3$ un qualsiasi vettore $\underline{b}_3$ che sia elemento dell'**insieme delle controimmagini** di $\underline{w}$ mediante f_{t_0}, i.e.

$$\overset{\leftarrow}{f_{t_0}}(\underline{w}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_{t_0}(\underline{x}) = \underline{w}\}.$$

Verficare dapprima con Rouche'-Capelli che questo sistema di controimmagini e' non vuoto e poi descrivere tutti i vettori in $\overset{\leftarrow}{f_{t_0}}$.

(iv) Denotato con $\mathcal{B} := \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}\}$ il sistema di vettori determinati ai punti precedenti, stabilire che $\mathcal{B}$ e' una nuova base di $\mathbb{R}^3$ verificando che la **forma multilineare alternante non nulla** data dal **determinante** 3×3 non si annulla sulla matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}$$

che ha per colonne i vettori ordinati del sistema $\mathcal{B}$ espressi in coordinate rispetto a $\mathcal{E}^3$ (in altri termini, verificare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}$ e' una matrice invertibile e quindi e' una matrice cambiamento di base).

(v) Sia dato il vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}^3$, ha coordinate

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right).$$

Determinare le coordinate di $\underline{v}$ in base $\mathcal{B}$ utilizzando la matrice $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3})^{-1}$, inversa della matrice cambiamento di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}$.

(vi) Determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare f_{t_0} nella base $\mathcal{B}$ del dominio $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}^2$ del codominio $\mathbb{R}^2$, i.e. determinare la matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^2}(f_{t_0}).$$

(vii) Si consideri lo **spazio vettoriale duale** $(\mathbb{R}^3)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, dotato della **base canonica duale**

$$(\mathcal{E}^3)^\vee = \{\underline{c}_1^*, \underline{c}_2^*, \underline{c}_3^*\}$$

definita dalla condizione

$$\underline{c}_i^*(\underline{c}_j) = \delta_{i.j}, \;\; 1 \leq i, j \leq 3.$$

Determinare la base duale

$$\mathcal{B}^\vee = \{\underline{b}_1^*, \underline{b}_2^*, \underline{b}_3^*\}$$

della base $\mathcal{B}$ determinata ai punti (iii) e (iv), descrivendo esplicitamente la matrice cambiamento di base $M_{\mathcal{B}^\vee}^{(\mathcal{E}^3)^\vee}$.