Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VIII Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica $\mathcal{E}^3$, sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in se' (o endomorfismo di $\mathbb{R}^3$) definito nel modo seguente:

$$\varphi(\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3, \;\; \varphi(2\underline{e}_1) = \underline{e}_2, \;\; \varphi(\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 + 6\underline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^3}(\varphi)$, che rappresenta l'endomorfismo φ in base canonica $\mathcal{E}^3$ sia nel dominio che nel codominio di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare le dimensioni dei sottospazi $Ker(\varphi)$ ed $Im(\varphi)$.
(iii) Determinare una base di $Ker(\varphi)$.
(iv) Dati i vettori linearmente indipendenti

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

espressi in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^3$, verificare che formano una base per un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ supplementare a $Ker(\varphi)$.
(v) Sia $\mathcal{V}$ la base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta unendo ordinatamente la base di $Ker(\varphi)$ e la base di W. Determinare la matrice $B := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(\varphi)$ rappresentativa di φ in base $\mathcal{V}$ sia nel dominio che nel codominio di φ.
(vi) Determinare la matrice $C := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}^3}(\varphi)$ rappresentativa di φ quando nel dominio di φ si usa la base $\mathcal{V}$ mentre nel codominio di φ si usa la base canonica $\mathcal{E}^3$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{E}^4}^{\mathcal{E}^3}(f)$ che rappresenta l'applicazione lineare f nelle rispettive basi canoniche $\mathcal{E}^4$ del dominio ed $\mathcal{E}^3$ del codominio.
(ii) Stabilire se f e' suriettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Im(f) \subset \mathbb{R}^3$ nelle coordinate date da $\mathcal{E}^3$.
(iii) Stabilire se f e' iniettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Ker(f) \subset \mathbb{R}^4$ nelle coordinate date da $\mathcal{E}^4$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}^3$, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

le cui componenti sono espresse rispetto ad $\mathcal{E}^3$.
(i) Verificare che i the vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ costituiscono una base $\mathcal{V}$ per $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare la matrice cambiamento di base $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}^3}$ e la matrice cambiamento di base $M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{V}}$.
(ii) Considerato il vettore $\underline{w}$ che, rispetto alla base $\mathcal{E}^3$, ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcolare le componenti di $\underline{w}$ rispetto alla base $\mathcal{V}$.
(iii) Determinare le coordinate del vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{E}^3$ sapendo che, rispetto alla base $\mathcal{V}$, esso ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine standard. Siano X_1, X_2, X_3, X_4 indeterminate.
(i) Si determini la dimensione del sottospazio affine $S_h \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ determinato dalle soluzioni del sistema lineare $SLO(3, 4, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} X_1 + (2+h)X_2 + X_3 + X_4 & = & 1 \\ X_1 + hX_2 + X_3 + hX_4 & = & 2 \\ hX_1 + X_2 + X_3 + 2hX_4 & = & 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.
(ii) Determinare, per ogni valore del parametro $h \in \mathbb{R}$, una base della giacitura di S_h.

Esercizio 5. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata x. Denotiamo con $\mathcal{E}_V$ la base canonica di V.
(i) Trovare un isomorfismo esplicito di V con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica $\mathcal{E}^4$.
(ii) Estrarre una base $\mathcal{B}$ dal sistema di generatori

$$\mathcal{S} := \{2,\ x+3,\ x^2 - x,\ x^3 + x^2,\ x^3 - x^2 + 2x\}$$

di V.
(iii) Sia dato il polinomio $p(x) \in V$ che, nella base $\mathcal{B}$ determinata al punto (ii), ha coordinate

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare le coordinate di $p(x)$ nella base canonica $\mathcal{E}_V$ di V.