Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VI Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento affine standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$. Siano dati i sottospazi affini

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r: \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare la dimensione del sottospazio affine $\mathcal{L}$.
(ii) Stabilire la mutua posizione in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di $\mathcal{L}$ e r.
(iii) Determinare l'equazione del **fascio di piani di asse** la retta r.
(iv) Determinare l'equazione cartesiana dell'unico piano nel fascio che sia passante per la retta r e parallelo al sottospazio affine $\mathcal{L}$.

Esercizio 2. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al piu' 2. Sia data l'applicazione $f : V \to V$ definita dalla condizione

$$f(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2) = (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2\, x^2.$$

(i) Verificare che l'applicazione f é un'applicazione lineare.
(ii) Stabilire se f é un'applicazione lineare iniettiva, altrimenti determinare $\dim(Ker(f))$.
(iii) Stabilire se f é un'applicazione lineare suriettiva, altrimenti determinare $\dim(Im(f))$.
(iv) Stabilire se f é **isomorfismo** di V in se stesso, equivalentemente un **automorfismo** di V.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}$, si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'espressione $L_A(\underline{x})$, ove $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ il vettore delle coordinate in $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{E}$.
(ii) Determinare $\dim(Im(L_A))$.
(iii) Determinare una base di $Im(L_A)$ ed equazioni sia parametriche che cartesiane di $Im(L_A)$ nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) individuate dal riferimento canonico $\mathcal{E}$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di L_A.
(iv) Determinare $\dim(Ker(L_A))$.

(v) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di $Ker(L_A)$ nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) individuate dal riferimento canonico $\mathcal{E}$ nel dominio $\mathbb{R}^3$ di L_A e determinare una base di $Ker(L_A)$.

Esercizio 4. (i) Quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali e' lineare?
(a) $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$, $\varphi(p(x)) := 2p(5) + p'(2)$
(b) $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$, $\phi(p(x)) := \begin{pmatrix} 2p(5) + p'(2) \\ p(0) + 3 \end{pmatrix}$.
(c) $\psi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\psi(A) = AA^t$.
(ii) Per le applicazioni al punto (i) che risultano essere lineari, quali fra esse sono iniettive? Quali fra esse sono suriettive?