Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

III Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio affine numerico sul campo $\mathbb{R}$, dotato di origine O coincidente con il vettore nullo e coordinate cartesiane affini (x_1, x_2, x_3) rispetto al riferimento canonico E_1, E_2, E_3. Si consideri il sottospazio affine $\mathcal{S}$ definito dal seguente $SL(3, 3; \mathbb{R})$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & -1 \\ 4x + 3x_2 - x_3 & = & -2 \end{cases}$$

(i) Determinare **equazioni cartesiane** ed **equazioni parametriche** della giacitura $W_{\mathcal{S}}$, i.e. scrivere $W_{\mathcal{S}}$ sia come luogo delle soluzioni nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ di un opportuno sistema lineare omogeneo dedotto da quello definente $\mathcal{S}$ sia come Span di opportuni vettori **linearmente indipendenti** dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.
(ii) Scrivere **equazioni parametriche** di $\mathcal{S}$, i.e. scrivere $\mathcal{S}$ come sottospazio affine dello spazio affine $\mathbb{R}^3$ nella forma $p + W_{\mathcal{S}}$, per un opportuno punto $p \in \mathcal{S}$.
(iii) Dato il punto q che nel, riferimento affine dato, ha coordinate $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, verificare che $q \notin \mathcal{S}$ e determinare **equazioni parametriche** del minimo sottospazio affine $\mathcal{T}$ che contenga sia q che $\mathcal{S}$.
(iv) Scrivere **equazioni cartesiane** di $\mathcal{T}$, i.e. esprimere $\mathcal{T}$ come come luogo delle soluzioni nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ di un opportuno sistema lineare non omogeneo.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^4$ come spazio affine numerico sul campo $\mathbb{R}$, dotato di origine O coincidente con il vettore nullo e coordinate cartesiane affini (x_1, x_2, x_3, x_4) rispetto al riferimento canonico E_1, E_2, E_3, E_4. Si considerino i punti

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare **equazioni parametriche** della retta affine $\overline{q_1 q_2}$.
(ii) Verificare che $\overline{q_1 q_2 q_3 q_4} = \overline{q_1 q_2 q_3}$ come sottospazi affini.
(iii) Determinare **equazioni cartesiane** del sottospazio affine $\overline{q_1 q_2 q_3}$.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{R}^2$ come piano affine numerico sul campo $\mathbb{R}$, dotato di origine O coincidente con il vettore nullo e coordinate cartesiane affini (x_1, x_2) rispetto al riferimento canonico E_1, E_2. Si consideri il punto $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la retta ℓ passante per $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e di giacitura $W := x_1 - x_2 = 0$.
(i) Determinare le equazioni della **riflessione rispetto al centro (punto)** c.
(ii) Scrivere una **equazione cartesiana** di ℓ.

(iii) Determinare un' **equazione cartesiana** della retta r, ottenuta come retta riflessa della retta ℓ rispetto al centro c.
(iv) Stabilire se le rette r e ℓ risultano rette affini parallele o meno nel piano affine $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V := M_{2,2}(\mathbb{Q})$ ed il sottoinsieme

$$Z := \left\{ A \in V |\ A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V.$$

(i) Stabilire se il sottoinsieme Z ha una struttura di sottospazio affine di V, quando V e' dotato della naturale struttura di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale.
(ii) In caso di risposta affermativa al punto (i), riconoscere la giacitura W_Z di Z come sottospazio noto e gia' studiato di V.
(iii) Scrivere W_Z come Span di opportuni vettori **linearmente indipendenti** di V.