Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

XI Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia dato uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione tre, munito di una base $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia dato l'endomorfismo $f \in End(V)$ per cui

$$f(\underline{v}_1) = \underline{v}_1 - 4\underline{v}_2 + 6\underline{v}_3,\ f(\underline{v}_2) = 4\underline{v}_1 - 7\underline{v}_2 + 6\underline{v}_3,\ f(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico dell'endomorfismo f e la **molteplicita' algebrica** di tutti gli autovalori di f.

(ii) Dedurre che f e' un endomorfismo diagonalizzabile.

(iii) Scrivere una forma diagonale D di f.

(iv) Determinare una matrice invertibile $M \in GL(3;\mathbb{R})$ grazie alla quale la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f in base $\mathcal{V}$ sia **coniugata** o **simile** alla forma diagonale D.

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A \in M(4 \times 4;\mathbb{R})$ data da:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico di A.

(ii) Determinare le **molteplicita' algebriche** di tutti gli autovalori di A.

(iii) Verificare che A e' diagonalizzabile.

(iv) Determinare una base diagonalizzante A.

Esercizio 3. Si consideri il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dotato di riferimento affine canonico $\mathcal{R}_{aff} := (O, \mathcal{E})$, dove O punto origine in questo riferimento, $\mathcal{E}$ la base canonica e (x_1, x_2) le coordinate affini i questo riferimento. Siano date le rette r e s che, nel riferimento affine $\mathcal{R}_{aff}$, hanno equazioni cartesiane rispettivamente:

$$r:\ x_1 - 1 = 0, \quad s: x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

(i) Nel fascio proprio di rette generato dalle rette r e s determinare la retta ℓ del fascio che è parallela alla retta che, nel riferimento $\mathcal{R}_{aff}$, ha equazione cartesiana $x_2 = 2$.

(ii) Si considerino il punto $P = r \cap s$ ed i vettori $\underline{r} = (0,2)$ (un vettore direttore della retta r) e $\underline{s} = (1,1)$ (un vettore direttore della retta s). Si indichi con

$$\mathcal{R}'_{aff} := (P, \{\underline{r}, \underline{s}\})$$

il sistema di riferimento affine che ha:

- come origine O' il punto P
- come base associata $\mathcal{E}' := \{\underline{r}, \underline{s}\}$.

Sia (y_1, y_2) il corrispondente sistema di coordinate per $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ nel riferimento $\mathcal{R}'_{aff}$. Determinare l'equazione del cambiamento di coordinate affini che esprime le coordinate (y_1, y_2) del nuovo riferimento affine $\mathcal{R}'_{aff}$ in funzione delle coordinate (x_1, x_2) del vecchio riferimento affine $\mathcal{R}_{aff}$.

(iii) Considerata la retta ℓ trovata al punto (i), determinare la sua equazione cartesiana nelle coordinate (y_1, y_2) del riferimento $\mathcal{R}'_{aff}$.