Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

XI Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Sia dato l'endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ soddisfacente le seguenti condizioni:

• Ker(f) e' il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

• preso il vettore $\underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$, allora

$$f(\underline{w}) = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2.$$

(i) Verificare che esiste una base $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^3$ costituita da **autovettori** dell'endomorfismo f, specificando precisamente rispetto a quali **autovalori** essi risultano essere autovettori.

(ii) Determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f in base $\mathcal{B}$, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

(iii) Scrivere la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f in base canonica $\mathcal{E}$, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

(iv) Scrivere $f(\underline{e}_i)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{E}$, per ogni $1 \leq i \leq 3$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ed il corrispettivo endomorfismo $L_A \in End(\mathbb{R}^2)$.

(i) Verificare che $\lambda = \frac{1}{2}$ e' un autovalore della matrice A.

(ii) Determinare equazioni cartesiane ed una base dell'**autospazio**

$$V_{\frac{1}{2}}(L_A) = Ker\left(L_A - \frac{1}{2}I_2\right),$$

che e' il sottospazio formato dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di L_A relativi all'autovalore $\lambda = \frac{1}{2}$.

(iii) Verificare che $\lambda = 1$ e' un altro autovalore della matrice A.

(iv) Determinare equazioni cartesiane ed una base dell'**autospazio**

$$V_1(L_A) = Ker(L_A - I_2),$$

che e' il sottospazio formato dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di L_A relativi all'autovalore $\lambda = 1$.

(v) Denotato con $\mathcal{V}$ il sistema di vettori ottenuto dall'unione dei vettori della base dell'**autospazio** $V_{\frac{1}{2}}(L_A)$ e di quelli della base dell'**autospazio** $V_1(L_A)$, dedurre che $\mathcal{V}$ e' una base per l'intero spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

(vi) Determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo L_A in base $\mathcal{V}$, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(L_A)$.

(vii) Considerata la base $\mathcal{V}'$, ottenuta permutando fra loro i vettori della base $\mathcal{V}$, determinare la matrice rappresentativa dell'endomorfismo L_A in base $\mathcal{V}'$, i.e. scrivere la matrice $M_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}'}(L_A)$.

(viii) Stabilire se $\lambda = 2$ puo' essere un ulteriore autovalore di A.

(ix) Utilizzando quanto calcolato precedentemente, scrivere esplicitamente la formula di

$$A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A$$

che denota il prodotto righe per colonne di A con se stessa per n volte.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici quadrate reali di ordine due

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quali fra esse e' l'unica matrice diagonalizzabile. Spiegare inoltre per quali motivi le due matrici residue non sono diagonalizzabili.