Esemoi di problemi di Geometria per cui tutti gli studenti di STM del secondo e terzo anno hanno forti difficoltà a trovare la soluzion e talvolta a connetterla agli argomenti studiati ad Analisi 3

1. *Dipendenza lineare:*

   Come si definisce un sistema di vettori linearmente *dipendente*, ossia cosa vuol dire, *in termini di coefficienti scalari* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il fatto che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente *dipendenti*?

2. *Indipendenza lineare:*

   Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $x \sin x$, $x \cos x$ formano un sistema linearmente indipendente?

3. *Indipendenza lineare:*

   Le funzioni $\sin^n x$, per $n = 0, \ldots, 100$, formano un sistema linearmente indipendente?

4. *Ortogonalità ed indipendenza lineare (questo è un test di verifica del corso di Analisi 3, ma le lacune degli studenti sono sul legame fra ortogonalità ed indipendenza lineare):*

   La funzione $\cos x$ appartiene al sottospazio di $L^2[-\pi, \pi]$ generato dalle funzioni $\sin nx$, per $n = 0, \ldots, 100$?

5. *Dimensione del kernel di un funzionale lineare, proiettori ortogonali:*

   Sia V il sottospazio di $L^2(0, 2\pi)$ generato dalle funzioni

   $$\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x\}.$$

   Queste funzioni formano un sistema linearmente indipendente? Che dimensione ha il sottospazio di V dato dalle funzioni che hanno integrale nullo su $(0, 2\pi)$? Se ne trovi una base, e si trovi il proiettore ortogonale su questo sottospazio.

6. *Dimensione del kernel di un funzionale lineare:*

   Sia V lo spazio dei polinomi in due variabili, di grado al più 2. Che dimensione ha il sottospazio di V dato dai polinomi che hanno integrale nullo sul quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$? Se ne trovi una base.

7. *Basi ed ortogonalità, proiezioni ortogonali:*

   Nello spazio dei polinomi di grado al più 2, i polinomi $\{q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = x - x^2, q_3(x) = 1 + x^2\}$ formano una base? Rispetto al prodotto scalare $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ quale è la proiezione ortogonale di q_3 sullo spazio generato da q_1 e q_2? Si faccia attenzione al fatto che questi vettori non sono ortonormali.

8. *Proiezioni ortogonali (questo è un test di verifica del corso di Analisi 3, ma le lacune degli studenti sono sulla proiezione ortogonale in due dimensioni):*

   Consideriamo il sottospazio di $L^2([0,1])$ dato da

   $$V := \{ae^x, \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

   Sia $g(x) := e^{-x}$. Determinare, con il minor numero di calcoli possibile,

   $$\inf_{f \in V} \|f - g\|^2_{L^2([0,1])}.$$

9. *Cambiamento di base:*

   Sia V_n lo spazio generato dalle funzioni e^{ikx}, $k = -n, \ldots, n$. Mostrare che la famiglia $\{\sin kx, k = 1, \ldots, n; \cos kx, k = 0, \ldots, n\}$ è anch'essa una base di V_n e trovare la matrice del cambiamento di base.

10. *Norma di un operatore lineare (un parte di questo problema riguarda il corso di Analisi Numerica, ma le difficoltà sono già sulla norma di una matrice):*

    Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, tre versori linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^3$, e Q l'operatore che manda $\vec{u}$ in $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v}$ in $\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{w}$ in $\vec{w}$. Si calcolino la norma ed il raggio spettrale dell'operatore Q.

11. *Autovalori:*

    Per quali γ la matrice

    $$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma(2-\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma(1-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    è diagonalizzabile? Per ciascun γ quanti sono gli autovettori linearmente indipendenti?

12. *Diagonalizzazione di operatori lineari:*

    (a) Si consideri lo spazio vettoriale bidimensionale V su $\mathbb{R}$ generato dalle funzioni $\sin x, \sin 2x$ (un sottospazio dello spazio delle funzioni derivabili). Questo spazio contiene la funzione $\cos x$?

    (b) Si consideri lo spazio vettoriale tridimensionale V su $\mathbb{R}$ generato dalle funzioni $\sin x, \cos x, \sin 2x$. Mostrare che l'operatore di derivata, che indichiamo con D, non manda V in V.

    (c) Si consideri lo spazio vettoriale quadridimensionale W su $\mathbb{R}$ generato dalle funzioni $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$. Queste 4 funzioni formano una base di W?

(d) Si mostri che W è un sottospazio invariante sotto l'azione di D. In W esistono autovettori di D? Se sì, quali sono?

(e) Ora estendiamo W ad uno spazio Z sul campo complesso considerando anche le combinazioni lineari *complesse* di $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$. In Z esistono autovettori di D? Se sì, quali sono?

13. *Geometria analitica nello spazio:*

    Sia D il dominio limitato racchiuso fra i paraboloidi $z = 4(x^2 + y^2)$ e $z = 1 + x^2 + y^2$. Si determini la curva di intersezione dei due paraboloidi e si trovi la proiezione di D sul piano $\{z = 0\}$.

14. *Geometria analitica nello spazio:*

    Sia D la parte del dominio $\{z \geqslant x^2 + y^2\}$ contenuto nella sfera con centro l'origine e raggio 1. Si trovi la proiezione di D sul piano $\{z = 0\}$.

15. *Geometria analitica nello spazio (questo è un test di verifica del corso di Analisi 2, ma la difficoltà degli studenti è sulla visualizzazione geometrica del fatto che su ciascuna retta perpendicolare ad un vettore fissato nel piano il prodotto scalare con quel vettore è costante):*

    Consideriamo il prodotto scalare $f(x, y) = (x, y) \cdot (1, 1)$ e la superficie $z = (f(x, y))^2$. Si disegni la superficie in prossimità del punto $(x, y) = (0, 0)$.