ESERCIZI DEL 7/10/2013

① • Sia $B \in \mathbf{M}_{n\times n}$. Mostrare che $U = B + {}^T B$ è una matrice simmetrica e che $V = B - {}^T B$ è antisimmetrica.

• Dimostrare che ogni $B \in \mathbf{M}_{n\times n}$ si scrive in modo unico come somma di una matrice simmetrica S e di una matrice antisimmetrica A.

Soluzione

• $${}^T U = {}^T(B + {}^T B) = {}^T B + {}^T({}^T B) = {}^T B + B = U$$
$${}^T V = {}^T(B - {}^T B) = {}^T B - {}^T({}^T B) = {}^T B - B = -V$$

• Basta osservare che $U + V = 2B$ o anche $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = B$ quindi una decomposizione si ottiene ponendo $S = \frac{1}{2}U$, $A = \frac{1}{2}V$. Tale decomposizione è unica: se infatti ci fossero due decomposizioni $B = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$ si avrebbe $S_1 - S_2 = A_2 - A_1$ ma l'unica matrice al contempo simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla quindi $S_1 - S_2 = A_2 - A_1 = 0$ e $S_1 = S_2$ e $A_1 = A_2$.

② Dire se i sistemi lineari associati alle seguenti matrici complete sono compatibili o no.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 30 & 1 & 7 & 4 & 100 \\ 16 & 0 & -2 & 0 & 58 \\ 1 & 8 & 4 & -1 & -4 \\ 46 & 1 & 5 & 4 & 157 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 7 & 4 & \pi & 9 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & \sqrt{2} & 4 \end{array}\right)$$

Soluzione

Il primo sistema è incompatibile. La prima e la seconda riga corrispondono a equazioni del tipo $30x + y + 7z + 4t = 100$ e $16x - 2z = 58$ che sommate danno $46x + y + 5z + 4t = 158$ e questo è incompatibile con l'equazione associata alla quarta riga: $46x + y + 5z + 4t = 157$.

Il secondo sistema è compatibile. I coefficienti $a_{13}=4$, $a_{25}=4$, $a_{31}=3$ e $a_{46}=\sqrt{2}$ sono termini pivot. Ogni riga non nulla ha un pivot quindi la matrice incompleta è ridotta e non avendo righe nulle il sistema è certamente compatibile. (Teorema 1.4, pagina 35 del libro "Matrici e vettori")

③ Risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} \sqrt[3]{2}\,x_1 + \sqrt{5}\,x_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt{5} \end{cases}$

Soluzione

La matrice completa è $\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt[3]{2} & \sqrt{5} & 7 \\ 1 & 2 & \sqrt[3]{4}+2\sqrt{5} \end{array}\right)$

Usiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan. Il termine $a_{11}=\sqrt[3]{2}$ è non nullo quindi sommiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per $-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Questa operazione verrà indicata sinteticamente scrivendo $R_2' = R_2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} R_1$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt[3]{2} & \sqrt{5} & 7 \\ 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[3]{2} & 2-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt{5} & \sqrt[3]{4}+2\sqrt{5}-\frac{7}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt[3]{2} & \sqrt{5} & 7 \\ 0 & 2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} & \frac{2}{\sqrt[3]{2}}+2\sqrt{5}-\frac{7}{\sqrt[3]{2}} \end{array}\right)$$

Dall'equazione $\left(2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}\right)x_2 = 2\sqrt{5}-\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ associata alla seconda riga si ottiene subito $x_2=\sqrt{5}$. Dalla prima riga $\sqrt[3]{2}\,x_1+\sqrt{5}\,x_2=7$ si ha $\sqrt[3]{2}\,x_1+5=7$ da cui $x_1=\sqrt[3]{4}$.

④ Risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} x \ln 49 + y \ln 8 = \ln 14 \\ x \ln 25 + y \ln 27 = \ln 15 \end{cases}$

<u>Soluzione</u> Procediamo come nell'esercizio precedente.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \ln 49 & \ln 8 & \ln 14 \\ \ln 25 & \ln 27 & \ln 15 \end{array}\right) \longrightarrow R_2' = R_2 - R_1 \frac{\ln 25}{\ln 49} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \ln 49 & \ln 8 & \ln 14 \\ \ln 25 - \frac{\ln 49}{\ln 49} \cdot \ln 25 & \ln 27 - \frac{\ln 25}{\ln 49} \cdot \ln 8 & \ln 15 - (\ln 14) \frac{\ln 25}{\ln 49} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 2 \ln 7 & 3 \ln 2 & \ln 2 + \ln 7 \\ 0 & 3 \ln 3 - \frac{\ln 5}{\ln 7} \cdot 3 \ln 2 & \ln 5 + \ln 3 - (\ln 2 + \ln 7) \frac{2 \ln 5}{2 \ln 7} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 2 \ln 7 & 3 \ln 2 & \ln 2 + \ln 7 \\ 0 & 3\left(\ln 3 - \frac{(\ln 5)(\ln 2)}{\ln 7}\right) & \ln 5 + \ln 3 - \frac{(\ln 2)(\ln 5)}{\ln 7} - \ln 5 \end{array}\right)$$

L'ultima riga é associata all'equazione:

$$3\left(\ln 3 - \frac{(\ln 5)(\ln 2)}{\ln 7}\right) y = \ln 3 - \frac{(\ln 2)(\ln 5)}{\ln 7}$$

da cui $3y = 1$ e $y = \frac{1}{3}$.

Dalla prima equazione si ha: $(2 \ln 7)x + (3 \ln 2)y = \ln 2 + \ln 7$
da cui $(2 \ln 7)x = \ln 7$ e $x = 1/2$.

Sono state sfruttate le proprietà dei logaritmi:
$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta$ e $\ln \alpha^t = t \cdot \ln \alpha$ con $\alpha > 0, \beta > 0$

5 $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ 2x+y+z-t=5 \\ 3x-y+4z+t=0 \\ 2x-y+4z+3t=\alpha \end{cases}$

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema é compatibile e in quei casi determinarne tutte le soluzioni.

Soluzione

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & \alpha \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} R'_2 = R_2 - 2R_1 \\ R'_3 = R_3 - 3R_1 \\ R'_4 = R_4 - 2R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & \alpha-8 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} R''_3 = R'_3 - 4R'_2 \\ R''_4 = R'_4 - 3R'_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & \alpha+1 \end{array}\right) \rightarrow R'''_4 = R''_4 - R''_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right)$$

La matrice é ora ridotta. Il sistema é compatibile se e solo se la matrice incompleta ha lo stesso numero di righe nulle della matrice completa. Questo accade solo per $\alpha = -1$.

Risolvendo il sistema: $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ y+z+3t=3 \\ z+2t=0 \end{cases}$

Si ottengono facilmente le soluzioni: $(1+2t, 3-t, -2t, t)$

⑥ Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+6z=0 \\ x+\lambda y+5z=0 \\ (\lambda+2)x+2y+2z=\lambda \end{cases}$$

è compatibile

Soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & \lambda & 5 & 0 \\ \lambda+2 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} R_2' = R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3' = R_3 - \frac{\lambda+2}{2}R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 2-\frac{\lambda+2}{2} & 2-\frac{\lambda+2}{2}\cdot 6 & \lambda \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} R_2'' = 2R_2' \\ R_3'' = 2R_3' \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2\lambda-1 & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -6\lambda-8 & 2\lambda \end{array}\right)$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$ il sistema è compatibile (perché scambiando la seconda con la terza riga si ottiene un sistema ridotto con tutte le righe della matrice incompleta non nulle).
Se $\lambda \neq \frac{1}{2}$ proseguiamo con l'algoritmo:

$$\rightarrow R_3''' = R_3'' + \left(\frac{\lambda-2}{2\lambda-1}\right)R_2'' \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2\lambda-1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6\lambda-8+4\frac{\lambda-2}{2\lambda-1} & 2\lambda \end{array}\right)$$

Le prime due righe della matrice incompleta sono sempre non nulle. La terza riga della matrice incompleta è nulla per $-6\lambda-8+4\frac{\lambda-2}{2\lambda-1}=0$ cioè per $\lambda=0$ o $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Se $\lambda \neq 0, -\frac{1}{2}$ il sistema è compatibile.
Se $\lambda=0$ la terza riga della matrice completa è nulla, quindi il sistema è compatibile anche in questo caso.
Il sistema è incompatibile solo per $\lambda=-\frac{1}{2}$: in questo caso la terza riga della matrice completa è non nulla.