ISOMETRIE ED AFFINITA' NOTEVOLI DEL PIANO CARTESIANO $\mathbb{R}^2$ E DELLO SPAZIO CARTESIANO $\mathbb{R}^3$

FLAMINIO FLAMINI

1. Alcune trasformazioni affini del piano cartesiano

In questo paragrafo consideriamo alcune trasformazioni affini (*affinità*) od euclidee (*isometrie*) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che hanno un particolare significato geometrico nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

In quanto segue, assumeremo di aver fissato una volta per tutto una origine O del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $RC(O; x, y)$. In altri termini, l'origine O si identifica con il vettore nullo $\underline{O}$ della struttura di spazio vettoriale sottogiacente di $\mathbb{R}^2$ e l'asse x (risp., y) si identifica con il sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}(\underline{e}_1)$ (risp., $\mathrm{Span}(\underline{e}_2)$), ove $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica ortonormale di $\mathbb{R}^2$ spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$.

Come visto nelle precedenti lezioni, il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ come sopra verra' canonicamente identificato con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Alcune isometrie del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Cominciamo con alcune fondamentali isometrie.

- Equazioni di traslazioni di $\mathbb{R}^2$: se $P \in \mathbb{R}^2$ è un punto del piano cartesiano e $\underline{P} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ è il corrispondente vettore, denoteremo con $t_{\underline{P}}$ la *traslazione di passo* $\underline{P}$. Nelle coordinate fissate (x, y) avremo che

$$t_{\underline{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + p_1 \\ y + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Essa è chiaramente un'isometria (visto che la matrice $A = I_2$ e' ortogonale) quindi e' anche una trasformazione affine (affinita').

Notiamo inoltre che, per ogni coppia di punti P, $Q \in \mathbb{R}^2$, si possono comporre due traslazioni e si ha:

$$t_{\underline{P}} \circ t_{\underline{Q}} = t_{\underline{P}+\underline{Q}},$$

i.e. la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che la traslazione si puo' scrivere come una proiettivita' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Equazioni di rotazioni di angolo θ attorno all'origine O: poiche' una siffatta rotazione ha $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come punto fisso, vedremo che essa sara' identificata ad un'applicazione lineare dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Questo significa avere un'applicazione lineare e vedremo che la matrice rappresentativa nella base canonica e di quest'applicazione sara' una matrice M *speciale ortogonale*, in simboli $MM^t = M^tM = I_2$ e $\det(M) = 1$.

Definizione 1. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta,O}$ l'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sè che ad un arbitrario punto $P \in \mathbb{R}^2$ associa il punto $Q = Q_P \in \mathbb{R}^2$, estremo libero del vettore $\underline{Q}$ ottenuto ruotando il vettore $\underline{P}$ di un angolo θ attorno al vettore nullo $\underline{O}$. $\mathcal{R}_\theta$ si chiama* rotazione attorno all'origine O di angolo θ.

Proposizione 1.1. *Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Allora*

$$\mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

In particolare,
- *se $\theta = 0$, allora $\mathcal{R}_\theta = \mathrm{Id}$;*
- *se $\theta > 0$, la rotazione di $\underline{x}$ è in senso antiorario rispetto al vettore $\underline{e}_1$;*
- *se $\theta < 0$, la rotazione di $\underline{x}$ è in senso orario rispetto al vettore $\underline{e}_1$.*

Dimostrazione. Sia α l'angolo convesso fra il vettore $\underline{x}$ e l'asse delle x. Precisamente, se $\underline{x}$ si trova nel I o IV quadrante, allora α è l'angolo convesso fra i vettori $\underline{x}$ ed $\underline{e}_1$; se $\underline{x}$ si trova invece nel II o III quadrante, allora α è l'angolo convesso fra i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{e}_1$. In ogni caso, si ha che

$$x = ||\underline{x}|| \cos\alpha, \quad y = ||\underline{x}|| \sin\alpha.$$

Il vettore $\underline{x}' := \mathcal{R}_\theta(\underline{x})$ è tale che $||\underline{x}'|| = ||\underline{x}||$ e forma con l'asse delle x un angolo pari a $\alpha + \theta$. Pertanto

$$x' = ||\underline{x}|| \cos(\alpha + \theta), \quad y' = ||\underline{x}|| \sin(\alpha + \theta).$$

Per le formule di addizione delle funzioni trigonometriche e per le precedenti relazioni, abbiamo quindi:

$$x' = ||\underline{x}||(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = ||\underline{x}||(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

onde l'asserto. □

Corollario 1.2. *Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ attorno all'origine O sono* isometrie lineari *dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, i.e. sono applicazioni lineari la cui matrice rappresentativa come in* (1.2) *è una matrice speciale ortogonale.*

Dimostrazione. Il fatto che siano isometrie lineari discende direttamente dalla rappresentazione (1.2); infatti per ogni θ le colonne della matrice rappresentativa costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. Infine, il determinate della matrice rappresentativa di $\mathcal{R}_\theta$ è dato da $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. □

Osservazione 1.3. Poiche' isometrie con matrice ortogonale speciale, le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ in particolare conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Notiamo inoltre che le rotazioni attorno all'origine godono delle seguenti ovvie proprietà, immediate conseguenze di (1.2).

Proposizione 1.4. *(i) Per θ, $\varphi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_\varphi \circ \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta+\varphi}$.*
(ii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}$.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

• <u>*Equazioni di rotazioni di angolo θ attorno ad un punto qualsiasi P*</u>: sia $\theta \in \mathbb{R}$ e sia $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\mathcal{R}_{\theta,P}$ l'isometria di $\mathbb{R}^2$ data dalla *rotazione di angolo θ attorno al punto P*. Per ottenere le equazioni di tale rotazione, si procede nel modo seguente:
(i) prima si considera la traslazione $t_{-\underline{P}}$ di passo $-\underline{P}$, che porta quindi il punto P nell'origine O di $\mathbb{R}^2$;
(ii) poi si compie la rotazione lineare $\mathcal{R}_\theta$ intorno ad O, come in Definizione 1;
(iii) infine si riapplica la traslazione $t_{\underline{P}}$ di passo $\underline{P}$ che riporta così O in P.

In definitiva, l'isometria cercata si può scrivere come:

$$\mathcal{R}_{\theta,P} = t_{\underline{P}} \circ \mathcal{R}_\theta \circ t_{-\underline{P}}. \tag{1.3}$$

Pertanto

$$\mathcal{R}_{\theta,P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t_{\underline{P}} \circ \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix} = t_{\underline{P}}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix}\right),$$

che fornisce le equazioni della rotazione attorno a P:

$$\mathcal{R}_{\theta,P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

dove

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che l'espressione (1.4) mostra che $\mathcal{R}_{\theta,P}$ è composizione di una opportuna traslazione e di un'isometria lineare che ha matrice rappresentativa speciale ortogonale.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_1 & \cos\theta & -\sin\theta \\ q_2 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

• <u>*Equazioni di riflessioni (o simmetrie) rispetto ad un punto di* $\mathbb{R}^2$</u>: questo sarà un caso particolare di quanto discusso precedentemente per le rotazioni.

Definizione 2. *Denotiamo con $\mathcal{S}_O$ l'applicazione di $\mathbb{R}^2$ in sè che ad un arbitrario punto P associa il punto estremo libero del vettore $-\underline{P}$. $\mathcal{S}_O$ è detta* riflessione (o simmetria) rispetto all'origine.

È chiaro dalla definizione che $\mathcal{S}_O$ non è altro che la rotazione attorno all'origine di angolo $\theta = \pi$. Pertanto, $\mathcal{S}_O$ è un'isometria lineare dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che e' rappresentata da una matrice speciale ortogonale. In particolare, essa conserva l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, come ciascuna rotazione fa. La sua rappresentazione matriciale e' chiaramente:

$$\mathcal{S}_O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia invece P un qualsiasi punto del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\mathcal{S}_P$ l'isometria di $\mathbb{R}^2$ data dalla *riflessione rispetto al punto* P. Per ogni punto $Q \in \mathbb{R}^2$ essa e' definita dalla condizione

$$\overrightarrow{PQ} = - \overrightarrow{P\mathcal{S}_P(Q)} \, .$$

Per ottenere le equazioni di tale riflessione, si ragiona come nel caso delle rotazioni attorno ad un punto P, i.e.
(i) si considera la traslazione $t_{-\underline{P}}$ di passo $-\underline{P}$, che porta quindi il punto P nell'origine O,
(ii) si applica la riflessione $\mathcal{S}_O$, come in (1.5),
(iii) infine si riapplica la traslazione $t_{\underline{P}}$ di passo $\underline{P}$ che riporta così O nel punto P.

In definitiva, l'isometria cercata è:

$$\mathcal{S}_P = t_{\underline{P}} \circ \mathcal{S}_O \circ t_{-\underline{P}}. \tag{1.6}$$

• *Equazioni di riflessioni (o simmetrie) rispetto a rette di* $\mathbb{R}^2$: sia r una qualsiasi retta del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Denotiamo con $\mathcal{S}_r$ l'isometria di $\mathbb{R}^2$ data dalla *riflessione rispetto alla retta* r. Per ottenere le equazioni di tale riflessione, possiamo procedere con strategie geometriche come segue.

Supponiamo che, nel riferimento dato, r abbia equazione cartesiana

$$r: \quad ax + by + c = 0.$$

Consideriamo l'equazione parametrica della retta s passante per un punto arbitrario $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e perpendicolare alla retta r. Essa e':

$$s: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La proiezione ortogonale del punto $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sulla retta r è il punto di intersezione $H = r \cap s$, ottenuto come punto su s per il valore del parametro

$$t_0 := -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

Poiché $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ si ottiene su s per il valore del parametro $t = 0$, allora il suo simmetrico rispetto alla retta r sarà determinato come punto sulla retta s per il valore del parametro

$$2t_0 = -2\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

Quindi, avremo che

$$\mathcal{S}_r \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - 2\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Sviluppando tutti i conti e scrivendola come trasformazione nelle coordinate di $\mathbb{R}^2$ otteniamo che le equazioni per tale riflessione sono:

$$\mathcal{S}_r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2ac}{a^2+b^2} \\ \frac{-2bc}{a^2+b^2} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Dalla precedente espressione, la retta r e' *luogo di punti fissi* della isometria $\mathcal{S}_r$, i.e. per ogni punto $Q \in r$ si ha $\mathcal{S}_r(Q) = Q$.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{-2bc}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

Come conseguenza della (1.7), abbiamo inoltre:

Corollario 1.5. *Per ogni retta vettoriale $r_0 : ax + by = 0$, la riflessione $\mathcal{S}_{r_0}$ e' data da*

$$\mathcal{S}_{r_0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

ed e' dunque una isometria lineare *la cui matrice rappresentativa nella base canonica come in* (1.8) *e'* ortogonale non speciale.

Osservazione 1.6. Differentemente da quanto discusso in Osservazione 1.3, le riflessioni $\mathcal{S}_{r_0}$ in particolare non conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Notiamo infine che le riflessioni $\mathcal{S}_{r_0}$ rispetto a rette vettoriali godono delle seguenti ovvie proprietà che discendono immeditamente da (1.8).

Proposizione 1.7. *Sia data $r_0 : ax + by = 0$, orientata in maniera tale che il suo vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ formi un angolo convesso α con $\underline{e}_1$. Denotiamo quindi $\mathcal{S}_{r_0}$ semplicemente con $\mathcal{S}_\alpha$. Si ha:*
(i) la riflessione rispetto all'asse x è:

$$\mathcal{S}_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

mentre la riflessione rispetto all'asse y è:

$$\mathcal{S}_{\pi/2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

(ii) Per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_\varphi$ è involutoria *i.e. $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\varphi = \mathrm{Id}$. In particolare, $\mathcal{S}_\varphi^{-1} = \mathcal{S}_\varphi$.*
(iii) Per $\varphi \neq \psi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi = \mathcal{R}_{2(\varphi-\psi)}$. In particolare, se $\varphi = \psi + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi = \mathrm{Id}$.

In altri termini:

⋆ a differenza delle rotazioni attorno all'origine, la composizione di riflessioni rispetto a rette vettoriali non gode della proprietà commutativa, i.e. in generale si ha $\mathcal{S}_\varphi \circ \mathcal{S}_\psi \neq \mathcal{S}_\psi \circ \mathcal{S}_\varphi$.

⋆ La composizione di due riflessioni rispetto a rette vettoriali distinte è una rotazione. Il fatto che una tale composizione venga un'isometria lineare con matrice speciale ortogonale (e non più ortogonale non-speciale) è chiaramente conseguenza del Teorema di Binet e del fatto che ogni riflessione rispetto ad una retta vettoriale r_0, essendo un'isometria lineare come osservato in Corollario 1.5, ha matrice rappresentativa in base canonica e che e' ortogonale ed a determinante -1.

Alcune trasfromazioni affini (non isometrie) del piano cartesiano. Le isometrie di $\mathbb{R}^2$ descritte precedentemente sono ovviamente anche affinità di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo ora due tipi fondamentali di affinità lineari che non sono isometrie lineari.

• *Le dilatazioni lineari*:

Definizione 3. *Siano λ, μ due numeri reali maggiori di od uguali ad 1, t.c. $(\lambda, \mu) \neq (1, 1)$. Denotiamo con $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ l'affinità lineare definita da*

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Una tale trasformazione viene chiamata *dilatazione lineare*. Quando $\lambda = \mu$ abbiamo in particolare un'*omotetia di modulo* λ.

Ovviamente i casi in cui λ e μ sono o minori di 1 o negativi sono analoghi ma non sono chiamate dilatazioni.

Quando almeno uno dei due numeri reali λ, μ e' diverso da 1, la dilatazione lineare $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ non conserva ne' gli angoli ne' le lunghezze. Se invece $\lambda = \mu$, nel qual caso $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda}$ è un'omotetia di modulo $\lambda > 1$, allora gli angoli vengono conservati ma non viene conservata la lunghezza.

In entrambi i casi non si conservano quindi le proprieta' metriche. Pertanto abbiamo sempre un sicuro esempio di affinità lineare che non può essere un'isometria lineare.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

• <u>*Le deformazioni lineari*</u>:

Definizione 4. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{T}_\alpha$ l'affinità lineare definita da*

$$\mathcal{T}_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Una tale trasformazione viene chiamata *deformazione lineare* (o *shear*). Ovviamente, se $\alpha \neq 0$, una deformazione lineare non conserva mai nè angoli nè tantomeno lunghezze.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche la retta impropria $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Trasformate di rette del piano cartesiano**: data una retta r di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, come trovare l'equazione cartesiana della retta s, trasformata di r mediante una qualsiasi trasformazione affine di $\mathbb{R}^2$?
La risoluzione di questo problema è molto semplice. Basta considerare due punti arbitrari P e Q distinti su r. Se f è l'isometria o l'affinità data dal problema, consideriamo i trasformati di questi punti mediante f, i.e. $f(P)$ e $f(Q)$. Concludiamo calcolando l'equazione cartesiana della retta per i due punti distinti $f(P)$ e $f(Q)$. Infatti, poichè f è biiettiva, $P \neq Q$ implica $f(P) \neq f(Q)$. Applicheremo questa semplice strategia nello svolgimento degli esercizi a fine del capitolo.
Quanto discusso precedentemente fornisce il seguente:

Teorema 1.8. *Due qualsiasi rette del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono sempre fra di loro* congruenti*, i.e. trasformate l'una nell'altra da una isometria del piano cartesiano. In particolare, due qualsiasi rette del piano cartesiano sono sempre* affinemente equivalenti*, i.e. trasformate l'una nell'altra da un'affinita'.*

Dimostrazione. Siano r e s due rette di $\mathbb{R}^2$. È sufficiente assumere che una delle due, ad esempio s, sia l'asse delle ascisse $y = 0$. Infatti, se troviamo un'isometria f_r di $\mathbb{R}^2$ che trasforma r nell'asse delle ascisse ed analogamente un'isometria f_s di $\mathbb{R}^2$ che trasforma s nell'asse delle ascisse, allora l'isometria $f_s^{-1} \circ f_r$ sarà un'isometria che trasforma r in s.

Consideriamo allora un punto arbitrario P su r e poi la traslazione $t_{-\underline{P}}$ di passo $-\underline{P}$. La trasformata di r coinciderà con la giacitura r_0 della retta r. Scegliamo un'orientazione su r_0 e calcoliamo l'angolo convesso fra la retta orientata ed $\underline{e}_1$. Sia questo θ. Se consideriamo la rotazione attorno all'origine di angolo $-\theta$ allora tutti i punti di r_0 verranno ruotati di modo che vadano a finire sull'asse delle ascisse. $\square$

La dimostrazione del precedente risultato ha la seguente conseguenza fondamentale:

Corollario 1.9. *Data una qualsiasi retta r del piano cartesiano, esiste sempre un opportuno riferimento cartesiano di $\mathbb{R}^2$, con origine O' e coordinate cartesiane $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, in cui l'equazione cartesiana di r è $y' = 0$.*

L'equazione cartesiana come in Corollario 1.9 viene chiamata *equazione canonica metrica* (rispettivamente, *affine*) delle rette del piano cartesiano. Il precedente corollario asserisce che, quale che sia la retta di partenza, esiste sempre un riferimento cartesiano in cui questa retta ha un'equazione cartesiana più semplice possibile ed identificabile con il primo asse di questo nuovo riferimento di $\mathbb{R}^2$.

2. Alcune trasformazioni affini dello spazio cartesiano

Come nel precedente paragrafo, qui consideriamo lo studio di alcune trasformazioni affini $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con particolare significato geometrico. Come sopra, assumeremo di aver fissato una volta per tutto una origine O dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ ed un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $RC(O; x, y, z)$. In altri termini, l'origine O si identifica con il vettore nullo $\underline{O}$ della struttura di spazio vettoriale sottogiacente di $\mathbb{R}^3$ e l'asse x (risp., y o z) si identifica con il sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}(\underline{e}_1)$ (risp., $\mathrm{Span}(\underline{e}_2)$ o $\mathrm{Span}(\underline{e}_3)$), ove $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ la base canonica ortonormale di $\mathbb{R}^3$ spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$.

Come visto nelle precedenti lezioni, lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ come sopra verra' canonicamente identificato con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Alcune isometrie fondamentali dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$. Iniziamo con il descrivere alcune isometrie di $\mathbb{R}^3$.

• *Equazioni di traslazioni dello spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$: $P \in \mathbb{R}^3$ è un punto del piano cartesiano e $\underline{P} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ è il corrispondente vettore dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, denoteremo con $t_{\underline{P}}$ la *traslazione di passo* $\underline{P}$, che è chiaramente un'isometria dello spazio cartesiano. In coordinate avremo che

$$t_{\underline{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + p_1 \\ y + p_2 \\ z + p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Essa è chiaramente un'isometria (visto che la matrice $A = I_3$ e' ortogonale) quindi e' anche una trasformazione affine (affinita'). Chiaramente, per ogni P, $Q \in \mathbb{R}^3$, si possono comporre due traslazioni e si ha:

$$t_{\underline{P}} \circ t_{\underline{Q}} = t_{\underline{P}+\underline{Q}},$$

i.e. la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Equazioni di rotazioni attorno a rette vettoriali*: come fatto per $\mathbb{R}^2$, cominciamo con il considerare alcune isometrie lineari notevoli: le *rotazioni* attorno ad una retta vettoriale. La teoria è un po' più complicata di quella sviluppata per $\mathbb{R}^2$. Diamo la seguente:

Definizione 5. *Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta, \underline{e}_1}$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando un generico vettore $\underline{x}$ di un angolo θ attorno al vettore $\underline{e}_1$ della base canonica e. $\mathcal{R}_\theta$ si chiama* rotazione di angolo θ attorno alla retta vettoriale (orientata) $\mathrm{Span}(\underline{e}_1)$.

Proposizione 2.1. *Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario. Allora*

$$\mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Dunque,
- *se* $\theta = 0$*, allora* $\mathcal{R}_\theta = \mathrm{Id}$*;*
- *se* $\theta > 0$*, la rotazione indotta sul piano vettoriale* (y, z) *è in senso antiorario rispetto al vettore* $\underline{e}_2$*;*
- *se* $\theta < 0$*, la rotazione indotta sul piano vettoriale* (y, z) *è in senso orario rispetto al vettore* $\underline{e}_2$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che la rotazione $\mathcal{R}_\theta$ per costruzione fissa il vettore $\underline{e}_1$ della base e, mentre sul piano vettoriale (y, z) si comporta come una rotazione di $\mathbb{R}^2$ attorno al vettore nullo. Pertanto, le formule precedenti discendono immediatamente da questa osservazione e dalla dimostrazione di Proposizione 1.1. □

Abbiamo le ovvie conseguenze della precedente proposizione, le cui dimostrazioni sono identiche a quelle svolte per le rotazioni in $\mathbb{R}^2$ attorno all'orgine.

Corollario 2.2. *Per ogni* $\theta \in \mathbb{R}$*, le rotazioni* $\mathcal{R}_\theta$ *attorno al vettore* $\underline{e}_1$ *sono* isometrie lineari *la cui matrice rappresentativa in base canonica come in* (2.2) *è speciale ortogonale.*

Osservazione 2.3. Dal Corollario 2.2-(ii), notiamo subito che le rotazioni $\mathcal{R}_\theta$ attorno a $\underline{e}_1$ in particolare conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$

Proposizione 2.4. *(i) Per* $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$*, si ha* $\mathcal{R}_\theta \circ \mathcal{R}_\varphi = \mathcal{R}_\varphi \circ \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_{\theta+\varphi}$*.*
(ii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$*,* $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}$*.*

In particolare, la composizione di rotazioni attorno ad $\underline{e}_1$ è ancora una rotazione attorno ad $\underline{e}_1$ e l'inversa di una rotazione attorno ad $\underline{e}_1$ è una rotazione attorno ad $\underline{e}_1$.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Tuttavia, non tutte le rotazioni lineari coinvolte in possibili problemi di geometria in $\mathbb{R}^3$ saranno necessariamente attorno al vettore $\underline{e}_1$. Vogliamo quindi determinare le formule di rotazione attorno ad una retta vettoriale qualsiasi utilizzando quanto dimostrato in Proposizione 2.1.

Supponiamo quindi di avere una retta vettoriale r di $\mathbb{R}^3$; vogliamo determinare le formule della rotazione di angolo θ attorno a r. Prima di tutto, affinchè il problema sia ben posto, dobbiamo avere un'orientazione di r: se r non è orientata, non è chiaro in quale direzione si deve fare la rotazione nel piano vettoriale $r^\perp$ complemento ortogonale di r. Pertanto, fissiamo su r un vettore direttore $\underline{v}$. Per fissare il senso della rotazione parleremo quindi di *rotazione di angolo* θ *attorno al vettore* $\underline{v}$ e la denoteremo con $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$. Un modo naturale per ottenere le formule di una tale rotazione è descritta nel seguente procedimento.

(i) In primo luogo, sia $\underline{f}_1$ il versore direttore di r associato a $\underline{v}$, i.e. $\underline{f}_1 = \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||}$. Scegliamo poi due altri versori $\underline{f}_2$ e $\underline{f}_3$, di modo che $f := \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ ed equiorientata con la base canonica e. Trovare una siffatta base f è molto semplice: il secondo versore $\underline{f}_2$ di f si determina prendendo un qualsiasi vettore non nullo $\underline{w}$ scelto ad arbitrio tra tutti quei vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a $\underline{v}$ e poi si considera il versore associato a $\underline{w}$, i.e. $\underline{f}_2 = \frac{\underline{w}}{||\underline{w}||}$; il terzo ed ultimo versore di f è dato direttamente dal prodotto vettoriale $\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2$. Notiamo quindi che basi siffatte possono essere scelte in infiniti modi.

(ii) In tale base, la rotazione $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ è la rotazione di angolo θ attorno a $\underline{f}_1$. Quindi, nelle notazioni di Proposizione 2.1, questa non è altro che la rotazione $\mathcal{R}^f_\theta = \mathcal{R}^f_{\theta,\underline{f}_1}$, dove l'apice in alto sta a ricordare che stiamo vedendo tutto relativamente alla base f. Da Proposizione 2.1, abbiamo quindi che la matrice $A^f := M_{f,f}(\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}})$ rappresentativa dell'endomorfismo $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ in base f è $A^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(iii) L'obiettivo finale è quello di determinare la matrice $A := A^e$ della rotazione cercata, espressa rispetto alla base e di partenza, i.e.

$$A = M_{e,e}(\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}).$$

Ricordiamo che, se $M := M_{e\ f}$ denota la matrice cambiamento di base dalla base e alla base f, allora M e' una matrice ortogonale i.e. $MM^t = M^tM = I_3$, visto che e ed f sono ambedue basi ortonormali. Pertanto, si ha:

$$A = M\ A^f\ \ M^t, \tag{2.3}$$

che determina l'espressione della matrice di rotazione $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ in base e come voluto.

Utilizzando Corollario 2.2 e Proposizione 2.4, abbiamo il seguente risultato immediato:

Corollario 2.5. *Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, le rotazioni $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ di angolo θ attorno ad una qualsiasi retta vettoriale orientata $r = Lin(\underline{v})$ sono* isometrie lineari dirette*, i.e. rappresentate da matrici ortogonali speciali. In particolare, tali rotazioni conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e godono delle seguenti proprietà:*
(i) Se $\theta = 0$, allora $\mathcal{R}_{0,\underline{v}} = \mathrm{Id}$;
(ii) Per $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$, si ha $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} \circ \mathcal{R}_{\varphi,\underline{v}} = \mathcal{R}_{\varphi,\underline{v}} \circ \mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} = \mathcal{R}_{\theta+\varphi,\underline{v}}$.
(iii) Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R}^{-1}_{\theta,\underline{v}} = \mathcal{R}_{-\theta,\underline{v}}$.

Dimostrazione. Notiamo che, da (2.3), per il Teorema di Binet si ha

$$det\ A = (det\ M)\ (det\ A^f)\ (det\ \ M^t) = (det\ M)\ (det\ A^f)\ (det\ M)^{-1} = det\ A^f$$

dove la penultima eguaglianza discende direttamente dal fatto che M è ortogonale e dalla proprietà del determinante della matrice inversa. Pertanto, per concludere basta applicare Corollario 2.2, Osservazione 2.3 e Proposizione 2.4. □

Esempio 2.6. A titolo di esempio, scriviamo le formule di rotazione $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2},\underline{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno al vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da quanto descritto sopra, vogliamo determinare $f = \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata e con $\underline{f}_1 = \underline{v}/||\underline{v}|| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Per prendere un vettore $\underline{w}$ ortogonale a $\underline{f}_1$, notiamo ad esempio che le coordinate di $\underline{f}_1$ sono tutte uguali; perciò una scelta possibile e naturale è prendere $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, almeno avremo sicuramente $\underline{f}_1\ \cdot\ \underline{w} = 0$. Con tale scelta, abbiamo

$$\underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

In base f, la matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/2,\underline{v}}$ è

$$A^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che, per definizione di matrice cambiamento di base, $M = M_{e\ f}$ ha come colonne le coordinate dei vettori della base f espresse rispetto alla base e, si ha

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

che è infatti una matrice ortogonale. Pertanto, la matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ in base e è:

$$A = M\ A^f\ \ M^t = \begin{pmatrix} 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

• *Equazioni di rotazioni attorno a rette orientate qualsiasi*: sia $\theta \in \mathbb{R}$ e sia r una qualsiasi retta orientata dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine. Sia $P \in \mathbb{R}$ un qualsiasi punto su r e sia $\underline{v}$ il vettore direttore fissato per l'orientazione di r. In particolare, avremo che r ha equazione parametrica vettoriale

$$r : \ \underline{x} = \underline{P} + t\ \underline{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denotiamo con $\mathcal{R}_{\theta,r}$ l'isometria di $\mathbb{R}^3$ data dalla *rotazione di angolo θ attorno alla retta orientata* r. Per ottenere le equazioni di tale rotazione, si procede nel modo seguente:

(i) prima si considera la traslazione $t_{-\underline{P}}$ di passo $-\underline{P}$, che porta il punto $P \in r$ nell'origine O di $\mathbb{R}^3$;

(ii) poi si compie la rotazione lineare $\mathcal{R}_{\theta,\underline{v}}$ intorno alla giacitura $r_0 = Lin(\underline{v})$ di r, come descritto precedentemente;

(iii) infine si riapplica la traslazione $t_{\underline{P}}$ di passo $\underline{P}$ che riporta così O in P.

In definitiva, l'isometria cercata si può scrivere come:

$$\mathcal{R}_{\theta,r} = t_{\underline{P}} \circ \mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} \circ t_{-\underline{P}}. \tag{2.4}$$

Per determinare esplicitamente le equazioni di tale isometria di $\mathbb{R}^3$, sia $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Pertanto

$$\mathcal{R}_{\theta,r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_{\underline{P}} \circ \mathcal{R}_{\theta,\underline{v}} \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \\ z-p_3 \end{pmatrix} = t_{\underline{P}} \left(A \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \\ z-p_3 \end{pmatrix} \right),$$

con A calcolata come in (2.3). Questo fornisce le equazioni della rotazione attorno alla retta orientata r date da:

$$\mathcal{R}_{\theta,r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

dove $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Notiamo che essa è composizione di una traslazione e di un'isometria lineare la cui matrice rappresentativa e' speciale ortogonale.

• *Equazioni di riflessioni (o simmetrie) rispetto a rette vettoriali*: consideriamo adesso altre isometrie lineari fondamentali: le *riflessioni (o simmetrie)* rispetto a rette vettoriali.

Definizione 6. *Sia r_0 una retta vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con $\mathcal{S}_{r_0}$ l'applicazione di $\mathbb{R}^3$ che ad un arbitrario punto $P \in \mathbb{R}^3$ associa il punto $Q = Q_P$, estremo libero del vettore $\underline{Q}$ ottenuto per riflessione di $\underline{P}$ rispetto ad r_0.*

Notiamo subito che la riflessione rispetto ad una retta vettoriale r_0 è un particolare tipo di rotazione lineare, precisamente è la rotazione di angolo π intorno a r_0. In questo caso, è immediato osservare che il risultato non dipende dall'orientazione di r. Da ultimo, per ogni retta vettoriale r_0, $\mathcal{S}_{r_0}$ è chiaramente un'isometria lineare con matrice speciale ortogonale; in particolare, conserva l'orientazione di basi di $\mathbb{R}^3$.

• *Equazioni di riflessioni (o simmetrie) rispetto all'origine O*:

Definizione 7. *Denotiamo con $\mathcal{S}_O$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ in sè definita in modo che, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ associa $-\underline{x}$. $\mathcal{S}_O$ è detta* riflessione (o simmetria) rispetto all'origine.

La sua rappresentazione matriciale e' chiaramente:

$$\mathcal{S}_O \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Pertanto, $\mathcal{S}_O$ è un'isometria lineare che ha matrice rappresentativa ortogonale non-speciale. In particolare, essa non conserva l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• *Equazioni di riflessioni (o simmetrie) rispetto a rette o punti arbitrari dello spazio cartesiano*: per quanto riguarda le riflessioni rispetto a rette non passanti per l'origine, si utilizza lo stesso procedimento delle rotazioni sopra descritto. Se la retta r non passa per O e $P \in r$ è un suo punto arbitrario, basterà considerare che la riflessione rispetto a r è:

$$\mathcal{S}_r := t_{\underline{P}} \circ \mathcal{S}_{r_0} \circ t_{-\underline{P}},$$

dove r_0 è la giacitura di r. Abbiamo già discusso precedentemente che la riflessione $\mathcal{S}_{r_0}$ non è altro che una rotazione di angolo π.

Per quanto riguarda la riflessione rispetto ad un qualsiasi punto $P \in \mathbb{R}^3$, basterà considerare

$$\mathcal{S}_P := t_{\underline{P}} \circ \mathcal{S}_O \circ t_{-\underline{P}}.$$

Un altro modo più geometrico è quello di osservare che il *centro di riflessione*, i.e. il punto P, è il punto medio fra un qualsiasi punto Q di $\mathbb{R}^3$ ed il suo simmetrico $\mathcal{S}_P(Q)$ rispetto a P. Di conseguenza, abbiamo l'eguaglianza tra i vettori associati $\underline{P} = \frac{1}{2}(\underline{Q} + \underline{\mathcal{S}_P(Q)})$. Se al posto di $\underline{Q}$, prendiamo il vettore incognito $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e se $\underline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$\mathcal{S}_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 - x \\ 2p_2 - y \\ 2p_3 - z \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_1 & -1 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & -1 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• <u>*Equazioni di riflessioni rispetto a piani dello spazio cartesiano*</u>: sia τ un arbitrario piano di $\mathbb{R}^3$. Vogliamo determinare le equazioni della *riflessione rispetto a* τ, denotata con $\mathcal{S}_\tau$. Un modo geometrico è analogo alla costruzione vista per le formule di riflessione in $\mathbb{R}^2$ rispetto ad una retta qualsiasi di $\mathbb{R}^2$. Infatti, si considera un punto arbitrario Q di $\mathbb{R}^3$ ed in seguito la sua proiezione ortogonale H su τ. Il riflesso (o simmetrico) $\mathcal{S}_\tau(Q)$ sara', per definizione, quell'unico punto sulla retta passante per Q e H in posizione tale che H sia il punto medio fra Q e $\mathcal{S}_\tau(Q)$. Vediamo in dettaglio questa costruzione.

Supponiamo che τ abbia ad esempio equazione cartesiana

$$\tau : \quad ax + by + cz + d = 0.$$

Consideriamo l'equazione parametrica vettoriale della retta s passante per un punto arbitrario $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ e perpendicolare a τ. Tale retta ha equazione parametrica vettoriale

$$s : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La proiezione ortogonale di $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ su τ si ottiene allora come punto sulla retta s per il valore del parametro

$$t_0 := -\frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Poiché il punto $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ si ottiene sulla retta s per il valore del parametro $t = 0$, allora il suo simmetrico rispetto a τ sarà determinato come punto sulla retta s per il valore del parametro

$$2t_0 = -2\, \frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Quindi, avremo che

$$\mathcal{S}_\tau \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - 2\, \frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Sviluppando tutti i conti e scrivendo sotto forma di trasformazione nelle coordinate di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che le equazioni per tale riflessione sono:

$$\mathcal{S}_\tau \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2ad}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2bd}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2cd}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

In particolare:

Corollario 2.7. *Per ogni piano vettoriale $\tau_0 : ax + by + cz = 0$, la riflessione $\mathcal{S}_{\tau_0}$ e' data da*

$$\mathcal{S}_{\tau_0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ed e' dunque una isometria lineare *la cui matrice rappresentativa nella base canonica come in* (2.9) *e' ortogonale non–speciale.*

Osservazione 2.8. Differentemente da quanto discusso in Corollario 2.5, le riflessioni $\mathcal{S}_{\tau_0}$ in particolare non conservano l'orientazione di basi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2ad}{a^2+b^2+c^2} & \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2bd}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{-2cd}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2ac}{a^2+b^2+c^2} & \frac{-2bc}{a^2+b^2+c^2} & \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}.$$

Alcune trasformazioni affini (non isometrie) dello spazio cartesiano. Le isometrie dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ descritte precedentemente sono ovviamente anche affinità di $\mathbb{R}^3$. Come fatto per $\mathbb{R}^2$, consideriamo ora due tipi fondamentali di affinità lineari che non sono isometrie lineari.

• Le dilatazioni lineari:

Definizione 8. *Siano λ, μ e ν numeri reali maggiori di od uguali ad 1 t.c. $(\lambda, \mu, \nu) \neq (1, 1, 1)$. Denotiamo con $\mathcal{D}_{\lambda,\mu,\nu}$ l'affinità lineare definita da*

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu,\nu} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Una tale trasformazione viene chiamata *dilatazione lineare*. Notare che quando $\lambda = \mu = \nu$ abbiamo in particolare un'*omotetia di modulo* $\lambda \geq 1$. Ovviamente i casi in cui λ, μ e ν siano negativi o positivi minori di 1 sono analoghi ma la trasformazione non si chiama dilatazione.

Notare che ad esempio, per λ, μ, ν generali, la dilatazione lineare $\mathcal{D}_{\lambda,\mu,\nu}$ non conserva nè gli angoli nè le lunghezze. Se invece $\lambda = \mu = \nu \in \mathbb{R}$, nel qual caso $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda,\lambda}$ è un'omotetia di modulo $\lambda \geq 1$, allora gli angoli vengono conservati; ciò che non viene conservata è la lunghezza. In ogni caso sono sicuri esempi di affinità lineari che non possono essere isometrie lineari.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

• Le deformazioni lineari:

Definizione 9. *Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{T}_{\alpha,\beta,\gamma}$ l'affinità lineare definita da*

$$\mathcal{T}_{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, una tale trasformazione viene chiamata *deformazione lineare* (o *shear*). Ovviamente, se $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, una deformazione lineare non conserva mai nè angoli nè tantomeno lunghezze. Questi sono ulteriori esempi di affinità lineari che non sono isometrie lineari.

Osserviamo che, dalle precedenti lezioni, poiche' identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ con la *carta affine* $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sappiamo che questa strasformazione si puo' scrivere come una proiettivit' di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa la carta affine $\mathcal{A}_0$ e quindi anche il piano improprio $X_0 = 0$ di questa carta affine; la rappresentazione in tal senso e':

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Trasformati di luoghi geometrici dello spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$: data una retta r (rispettivamente, un piano π) nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, come trovare l'equazione della retta s (rispettivamente, del piano τ) ottenuti per trasformazione di r (rispettivamente di π) mediante una qualsiasi isometria od una qualsiasi affinità di $\mathbb{R}^3$?

La risoluzione di questo problema è molto semplice. Per la trasformata di r, basta considerare due punti arbitrari P e Q distinti su r; per il trasformato di π, basta considerare tre punti arbitrari e non allineati su π, P_1, Q_1 e R_1. Se f è l'isometria o l'affinità data dal problema, allora consideriamo i trasformati di questi punti mediante f. Concludiamo calcolando l'equazione della retta per i due punti distinti $f(P)$ e $f(Q)$, per trovare l'equazione di s, e l'equazione del piano per i tre punti distinti e non allineati $f(P_1)$, $f(Q_1)$ e $f(R_1)$, per trovare l'equazione di τ.

Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, questa semplice osservazione ha come conseguenza un fatto molto importante.

Teorema 2.9. *(i) Due qualsiasi rette dello spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$ *sono sempre fra di loro* congruenti *(in particolare,* affinemente equivalenti*).*
(ii) Due qualsiasi piani dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ *sono sempre fra di loro* congruenti *(in particolare,* affinemente equivalenti*).*

La dimostrazione è concettualmente uguale a quella di Teorema 1.8, pertanto è lasciata al lettore per esercizio. In particolare, utilizzando la stessa analisi, abbiamo come conseguenza:

Corollario 2.10. *Dato una qualsiasi piano π dello spazio cartesiano, esiste sempre un opportuno riferimento cartesiano di* $\mathbb{R}^3$*, con origine O' e coordinate cartesiane* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$*, in cui l'equazione cartesiana di π è $z' = 0$.*

L'equazione cartesiana come sopra viene chiamata l'*equazione canonica metrica* (rispettivamente, *affine*) dei piani dello spazio cartesiano. Il precedente corollario asserisce che, quale che sia il piano di partenza, esiste sempre un riferimento cartesiano in cui questo piano ha un'equazione cartesiana più semplice possibile. Analoga conseguenza si ha per le rette.

3. Esercizi Svolti

Esercizio 1: Siano dati in $\mathbb{R}^2$ la retta $r: \ x-2y-1=0$ ed il punto $P=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto a r e le formule di rotazione di centro P e angolo $\theta=\pi/2$.
(ii) Denotati con $\mathcal{S}_r$ e con $\mathcal{R}_{P,\pi/2}$, rispettivamente, la riflessione e la rotazione trovate al punto (i), determinare le coordinate del punto $(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{R}_{P,\pi/2})(P_1)$, dove $P_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Svolgimento. (i) Per trovare le equazioni della riflessione, utilizziamo il metodo geometrico esposto precedentemente. Da (1.7) si ottiene che le equazioni della riflessione sono

$$x'=\frac{1}{5}\,(3x+4y+2),\ \ y'=\frac{1}{5}\,(4x-3y-4).$$

Le equazioni della rotazione sono invece

$$x'=3-y,\ \ y'=\ x+1.$$

(ii) $\mathcal{R}_{P,\pi/2}(P_1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, quindi $(\mathcal{S}_r\circ\mathcal{R}_{P,\pi/2})(P_1)=\mathcal{S}_r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

□

Esercizio 2 Sia s la retta di equazione cartesiana $2x+3y=0$. Determinare l'equazione cartesiana della retta s' ottenuta per riflessione della retta s rispetto alla retta r, di equazione cartesiana $r:\ x-y+1=0$.

Svolgimento. Prima di tutto dobbiamo determinare le equazioni della riflessione $\mathcal{S}_r$. Sia $P=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$ un punto arbitrario di $\mathbb{R}^2$. La retta h passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana $x+y=p_1+p_2$. Sia $H=r\cap h$, che ha coordinate $H=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(p_1+p_2-1)\\\frac{1}{2}(p_1+p_2+1)\end{pmatrix}$. Allora il punto $P':=\begin{pmatrix}p_1'\\p_2'\end{pmatrix}$ sarà il simmetrico di P rispetto a r se, e solo, se $\underline{P}'=2\underline{H}-\underline{P}=\begin{pmatrix}p_2-1\\p_1+1\end{pmatrix}$. Questo significa che le equazioni della riflessione sono $x'=y-1$, $y'=x+1$. Ora prendiamo due punti arbitrari sulla retta s. Poiché s passa per l'origine, uno di tali punti sarà per comodità O. L'altro punto possiamo prenderlo ad arbitrio, ad esempio $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Pertanto, $\mathcal{S}_r\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ mentre $\mathcal{S}_r\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Quindi, un vettore direttore per s' sarà dato da $\underline{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. L'equazione cartesiana di s' si ottiene quindi considerando ad esempio $det\begin{pmatrix}x+1 & y-1\\-2 & 3\end{pmatrix}=0$, che determina $s':\ 3x+2y+1=0$. □

Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano standard $RC(O;x,y)$, sia data la retta

$$r:\ x+2y-3=0.$$

(i) Determinare le formule di riflessione rispetto a r.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta per riflessione rispetto a r della circonferenza di centro $C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ e raggio 2.

Svolgimento. (i) Sia $P=(a,b)$ il punto generico di $\mathbb{R}^2$. La retta perpendicolare a r passante per P ha equazioni parametriche

$$x=a+t,\ y=b+2t.$$

L'intersezione con r determina

$$t=-\frac{2}{5}a-\frac{4}{5}b+\frac{6}{5}.$$

Pertanto le formule di riflessione sono

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Poiche' una riflessione e' un'isometria, e sufficiente conoscere le coordinate del riflesso del centro C, visto che il raggio rimarra' invariato. Pertanto, poiche' $f(C) = \begin{pmatrix} -36/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, l'equazione cartesiana della riflessa di $\mathcal{C}$ e'

$$(x + 36/5)^2 + (y - 1/5)^2 = 4.$$

$\square$

Esercizio 4: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O; x, y)$, e' data la trasformazione affine

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

equivalentemente rappresentata dalla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se F e' un'isometria o meno di $\mathbb{R}^2$.
(ii) Sia r la retta di equazione cartesiana $2x + y - 3 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana della retta $F(r)$ trasformata di r mediante F.

Svolgimento. (i) Poiche' la parte lineare della trasformazione F e' rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante 5, F e' necessariamente un'affinita' che non e' un'isometria di $\mathbb{R}^2$.
(ii) Per trovare equazioni cartesiane di $F(r)$ basta scegliere due punti arbitrari su r, P e Q e determinare l'equazione cartesiana della retta per 2 punti $\square$

Esercizio 5: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale standard $RC(O, x, y, z)$, sia $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\alpha : \quad 2x - y + z = 4.$$

(i) Determinare l'isometria $\mathcal{S}_\alpha$ di $\mathbb{R}^3$ descritta dalle formule di riflessione rispetto al piano α.
(ii) Descrivere i punti fissi di $\mathcal{S}_\alpha$.
(ii) Determinare equazioni parametriche del piano π ottenuto per riflessione rispetto ad α del piano coordinato $z = 0$.

Svolgimento. (i) Sia $P = (a, b, c)$ un punto arbitrario di $\mathbb{R}^3$. Un vettore normale al piano α e' il vettore $\underline{n} = (2, -1, 1)$. Pertanto la retta r, passante per P e perpendicolare a α, ha equazione parametrica vettoriale

$$\underline{x} = \underline{P} + t\,\underline{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$x = a + 2t, \quad y = b - t, \quad z = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con α, si ottiene il valore

$$t_0 = \frac{4 + b - c - 2a}{6}.$$

Quindi, se $S_\alpha(P)$ denota il simmetrico di P rispetto a α, esso si ottiene come punto sulla retta r, corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\alpha(P) = (a,b,c) + \frac{4+b-c-2a}{3}\ (2,-1,1).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a α sono

$$S_\alpha(a,b,c) = (-a/3+2b/3-2c/3+8/3; 2a/3+2b/3+c/3-4/3; -2a/3+b/3+2c/3+4/3).$$

(ii) Il luogo di punti fissi di S_α e' ovviamente costituito dal piano α stesso, per definizione di riflessione.
(iii) Prendiamo tre punti non allineati arbitrari su $z=0$, siano essi $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$. I loro riflessi sono rispettivamente $A = (8/3,-4/3,4/3)$, $B = (10/3,-2/3,5/3)$ e $C = (7/3,-2/3,2/3)$. Due vettori direttori per la giacitura di π sono dati ad esempio da $B-A \sim (2,2,1)$ e $C-A \sim (1,-2,2)$. Pertanto, equazioni parametriche di π sono date da

$$(x,y,z) = (8/3,-4/3,4/3) + t(2,2,1) + s(1,-2,2), \quad t,\ s \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Esercizio 6: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O;x,y,z)$, sia Π il piano di equazione cartesiana

$$x+y=1$$

e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 1 \end{cases}$$

(i) Scrivere le formule di riflessione S_Π, rispetto al piano Π.
(ii) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = S_\Pi(r)$, riflessa di r.

Svolgimento. (i)–(ii) Sia $P = r \cap \Pi$. Percio':

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Sia $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$. La retta n passante per Q ed ortogonale a Π ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $n \cap \Pi$ si ottiene per $t = 1/2$. Percio' il riflesso Q' di Q rispetto a Π e' per $t=1$ cioe' $Q' = (0,2,0)$.
Quindi m ha equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Esercizio 7: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O;x,y,z)$, sia α il piano di equazione cartesiana

$$x+2y=0.$$

Calcolare l' equazione cartesiana del piano passante per i punti riflessi rispetto al piano α dei punti $O = (0,0,0)$, $P = (1,1,0)$ e $Q = (0,1,0)$.

Svolgimento. Visto che α passa per l'origine, si determina immediatamente:

$$S_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5x - 4/5y \\ -4/5x - 3/5y \\ 1/5z \end{pmatrix} \in r.$$

Basta quindi trovare l'equazione cartesiana del piano per i tre punti

$$(0,0,0), (-1/5, -7/5, 0), (-4/5, -3/5, 0).$$

$\square$

Esercizio 8: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O; x, y, z)$, siano dati il piano

$$\pi : \quad x + 2y = 0$$

e la retta

$$\ell : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Trovare le equazioni cartesiane della retta r ottenuta per proiezione ortogonale di ℓ sul piano π.
(ii) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2},\ell}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta orientata ℓ.
(iii) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2},\ell}(r)$, ottenuta cioe' per rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ della retta r attorno alla retta orientata ℓ.

Svolgimento. (i) Le equazioni cartesiane di ℓ sono

$$\begin{cases} x \quad -z = 0 \\ x \quad -y = 1 \end{cases}$$

Percio', il fascio $\mathcal{F}$ di piani di asse la retta ℓ ha equazione

$$(\lambda + \mu)x - \mu y - \lambda z - \mu = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

La retta r sara' intersezione del piano π e dell'unico piano del fascio $\mathcal{F}$ che e' ortogonale a π. Dunque otteniamo la condizione

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\mu \\ -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda - \mu = 0$$

e quindi le equazioni di r sono:

$$\begin{cases} 2x \quad -y \quad -z = 1 \\ x \quad +2y \quad = 0 \end{cases}$$

(ii) Denotiamo con $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore direttore di ℓ. Sia $f = \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, positivamente orientata e con $\underline{f}_1 = \underline{v}/||\underline{v}||$. Percio'

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \ \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

In base f, la matrice di rotazione $R_{\pi/2,\ell}$ e':

$$A^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percio', se $M = M_{e,f}$ denota la matrice cambiamento di base dalla base canonica e alla base ortonormale f, M e' una matrice ortogonale. Conseguentemente, la matrice della rotazione $R_{\pi/2,\ell}$ in base e e':

$$A = M\ A^f\ M^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, le formule di rotazione attorno alla retta orientata ℓ sono date da

$$t_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ A \circ t_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \circ A \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} =$$

$$= t_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1-\sqrt{3}}{3}y + \frac{1+\sqrt{3}}{3}z - \frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1-\sqrt{3}}{3}z - \frac{2}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3}x + \frac{1+\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{\sqrt{3}-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1-\sqrt{3}}{3}y + \frac{1+\sqrt{3}}{3}z + \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1-\sqrt{3}}{3}z - \frac{2}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3}x + \frac{1+\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{\sqrt{3}+1}{3} \end{pmatrix}$$

(iii) Il vettore direttore $\underline{v}$ della retta r e' dato dal prodotto vettoriale dei vettori normali dei piani che definiscono la sua equazione cartesiana. Pertanto

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il ruotato del vettore $\underline{v}$ e' $A(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Prendiamo ora un punto arbitrario su r, ad esempio $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Applichiamo le formule di rotazione del punto (ii) a questo punto, ottenendo $Q = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Pertanto m ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 9: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, si consideri la sfera $\mathcal{S}$ di centro l'origine O e raggio $r = 2$. Sia inoltre π il piano di equazione cartesiana

$$x - z = 3.$$

(i) Determinare le formule di riflessione $S_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto al piano π

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}'$ ottenuta per riflessione della sfera $\mathcal{S}$ rispetto a π.

(iii) Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Sia $S_\pi(P) \in \mathcal{S}'$ il riflesso di P rispetto a π. Si determini l'equazione cartesiana del piano tangente alla sfera $\mathcal{S}'$ nel punto $S_\pi(P)$.

(iv) Sia α il piano di equazione cartesiana $z + 2 = 0$. Dopo aver verificato che α passa per $S_\pi(P)$, determinare l'equazione cartesiana della retta tangente nel punto $S_\pi(P)$ alla circonferenza $\mathcal{C}' = \mathcal{S}' \cap \alpha$.

Svolgimento. (i) Prendiamo un punto arbitrario di $\mathbb{R}^3$, sia esso $K = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le equazioni parametriche della retta h, passante per K e perpendicolare a π, sono

$$x = a + t, \quad y = b, \quad z = c - t \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considerare $h \cap \pi$ equivale ad imporre

$$a + t - c + t - 3 = 0$$

che fornisce

$$t = \frac{1}{2}(-a + c + 3).$$

Visto che il punto K corrisponde al valore del parametro $t = 0$, allora il simmetrico di K si ottiene per il valore di

$$t = -a + c + 3.$$

Sostituendo nelle equazioni parametriche di h questo valore di t, otteniamo quindi

$$x = c + 3, \; y = b, \; z = a - 3.$$

In altre parole, le formule di riflessione rispetto a π sono

$$S_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 3 \\ y \\ x - 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Il centro C' di $\mathcal{S}'$ e'

$$C' = S_\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Poiche' S_π e' un'isometria, il raggio di $\mathcal{S}'$ e' sempre $r = 2$. Pertanto, l'equazione cartesiana di $\mathcal{S}'$ e':

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4.$$

(iii) Si ha

$$S_\pi(P) = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e basta sostituire le sue coordinate nell'equazione di $\mathcal{S}'$ per verificare che esso appartiene a $\mathcal{S}'$. Un vettore normale al piano tangente a $\mathcal{S}'$ in $S_\pi(P)$ e' dato da

$$\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OS_\pi(P)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione del piano tangente a $\mathcal{S}'$ in $S_\pi(P)$ e' della forma

$$\sqrt{2}x + y + z + d = 0,$$

con d parametro da determinare. Il passaggio per $S_\pi(P)$ fornisce $d = -1 - 3\sqrt{2}$. Quindi il piano tangente cercato e'

$$\sqrt{2}x + y + z - 1 - 3\sqrt{2} = 0.$$

(iv) L'equazione di $\mathcal{C}$ e'

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 3)^2 - 4 = z + 2 = 0$$

i.e.

$$(x - 3)^2 + y^2 - 3 = z + 2 = 0,$$

e la retta tangente cercata ha quindi equazione

$$\sqrt{2}x + y + z - 1 - 3\sqrt{2} = z + 2 = 0.$$

□

Esercizio 10: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y, z)$, siano date le due coppie di punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche della retta ℓ, congiungente i punti P_1 e P_2, e della retta m, congiungente i punti Q_1 e Q_2.
(ii) Verificare che l'affinita' lineare data da

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

trasforma la retta ℓ nella retta m.
(iii) Determinare gli eventuali punti fissi dell'affinita' F.

Svolgimento. (i) ℓ e' la retta passante per P_1 e con vettore direttore $\underline{v} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$x = 1 + t, \ y = 1 - t, \ z = 1 + 2t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente m e' la retta passante per Q_1 e con vettore direttore $\underline{v}' = Q_2 - Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$x = 1 + 2t, \ y = 2 + 2t, \ z = 3t, \ t \in \mathbb{R}.$$

(ii) E' facile verificare che

$$f(P_i) = Q_i, \ 1 \leq i \leq 2.$$

Quindi l'affinita' lineare trasforma fra loro anche le rette che congiungono queste coppie di punti.
(iii) I punti fissi dell'affinita' lineare F sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano la relazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

in altri termini, i punti fissi di F sono individuati dall'autospazio della matrice A relativo all'autovalore 1. In effetti 1 e' autovalore di A e la sua molteplicita' algebrica e geometrica coincidono e sono uguali ad 1. In effetti, l'autospazio e' dato da

$$y = z = 0$$

che e' l'asse delle ascisse. In altri termini, l'asse x e' retta fissa per F. Piu' precisamente e' retta di punti fissi di F.

□