Tutorato 4 Geometria 1

Corso di Laurea in Scienze e Tecnologia per i Media - Roma “Tor Vergata”

Roma, 21 Novembre 2015

1. Sia $F = L(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare $F(\underline{e}_1), F(\underline{e}_2), F(\underline{e}_3), F((1,1,1)), F((0,0,0))$ e disegnarli.

   (b) Cosa fa geometricamente F?

   (c) Calcolare $F(Span(3,4,5))$.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Individuare dominio e codominio di L_A, L_B.

   (b) Determinare per ognuna nucleo ed immagine.

   (c) Discutere suriettività ed iniettività.

   (d) Verificare che dim(dominio)=dim(nucleo)+dim(immagine).

   (e) Calcolare esplicitamente $L_A \circ L_B, L_A \circ L_A \circ L_B, L_A \circ L_{(A)^{-1}}, L_{(A)^3}$.

3. Sia $L : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^{17}$ con $L = L_A$ e $rg(A) = 5$. Determinare $dim(Ker(L))$ e $dim(Im(L))$.

4. Dire se le seguenti applicazioni sono lineari o meno. In caso dipendano da un parametro t, trovare i valori del parametro per i quali l’applicazione è lineare. Individuare poi le matrici associate alle applicazioni lineari.

   (a) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3y \\ z \\ x+y \end{pmatrix}$

   (b) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y^2 \\ y-z \end{pmatrix}$

(c) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(d) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xcos(t) + ysen(t) \\ -xsen(t) + ycos(t) \end{pmatrix}$

(e) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - t + 2 \\ yt - x \end{pmatrix}$

(f) $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e sia $D : V \to V$ tale che $D(p) = p'$. Trovare una base di V e la matrice associata a D.

6. Sia L_A data da $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare un sottospazio U tale che $dim(U) = dim(F(U))$.

   (b) Trovare un sottospazio U tale che $dim(U) > dim(F(U))$.

   (c) Determinare $Ker(L_A), Im(L_A)$.

7. Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, risolvere se possibile:

   (a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases}$

8. Discutere la risolubilità del seguente sistema al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) $\begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + 5z = b \\ 2y + 6z = c \end{cases}$