Esercitazione IV – Scienze e Tecnologie per i media

16 – 01 – 2017

Operatori ortogonali e autoaggiunti. Teorema spettrale.

Esercizio 1. Nello spazie euclideo$\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard e della base canonica, siano assegnati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

(1) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di $W = Span\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$
(2) Costruire a partire dal sistema $\{v_1,\, v_2,\, v_3\}$, una base ortogonale per W.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica e del prodotto scalare standard, siano assegnati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

(1) Sia $U = Span\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5\}$. Determinare una base, equazioni parametriche e cartesiane di U.
(2) Ortogonalizzare la base di U determinata al punto precedente.
(3) Estendere la base ortogonale di U del punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^3$.
(4) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U^\perp$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard e della base canonica, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Determinare dimensione di $U^\perp$.
(2) Dato il vettore $v = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, determinare il vettore $\pi_U(v)$, proiezione ortogonale di v sul sottospazio U.
(3) Calcolare $||v - \pi_U(v)||$ e $\cos\theta$, ove θ rappresenta l angolo convesso tra i vettori v e $\pi_U(v)$.

Esercizio 4. Siano date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Verificare che A e C hanno lo stesso polinomio caratteristico.
(2) Diagonalizzare A.

(3) Triangolarizzare A mediante una base ortonormale.
(4) Provare che C non è diagonalizzabile.
(5) Triangolarizzare C tramite una base ortonormale.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica e del prodotto scalare standard, si consideri fissato il vettore

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia T l'operatore definito da

$$T(x) = x \wedge u_0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

(1) Dire se T è un operatore autoaggiunto.
(2) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e confrontare con il risultato con il punto precedente.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ sia T un operatore autoaggiunto definito dalla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Utilizzando il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A.
(2) Determinare una base ortogonale rispetto cui A è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Stabilire la forma diagonale della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

e trovare una base diagonalizzante per A.