Esercitazione III – Scienze e Tecnologie per i media

07 – 12 – 2016

Diagonalizzazione di endomorfismi, autovalori, autovettori

Esercizio 1. Dire se i vettori dati sono autovettori per le matrici corrispondenti e se sì dire per quale autovalore.

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(3)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbb{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti e dire quali matrici sono diagonalizzabili.

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) Calcolare polinomio caratteristico di A;
(2) Calcolare gli autovalori di A e gli autovettori corrispondenti;
(3) Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia T l'operatore lineare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(1) Determinare i valori di a, b, c per cui A è diagonalizzabile.
(2) Per tali valori determinare una base $\mathbf{B}$ di $\mathbb{R}^4$ che sia diagonalizzante per A.

Esercizio 5. Sia T l'operatore lineare su $\mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori di T e i rispettivi autospazi, specificando per ogni autovalore la molteplicità algebrica e geometrica.
(2) Stabilire se T è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante per T.

Esercizio 6. Sia dato l'operatore lineare T sullo spazio $\mathbb{R}^3$, individuata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare gli autovalori con le relative molteplicità algebriche e geometriche.
(2) Calcolare gli autospazi e trovare, se esiste, una base di autovettori per T.
(3) Scrivere la forma diagonale di T.

Esercizio 7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ e sia dato il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Verificare che v è autovettore di A.
(2) Determinare gli autovalori di A e per ciascuno indicarne la molteplicità geometrica e algebrica.
(3) Dire se A è diagonalizzabile.
(4) Calcolare $A^{11}(v)$.

Esercizio 8. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Determinare gli autovalori di A, stabilendo per ognuno la molteplicità geometrica e algebrica.
(2) Determinare gli autospazi di A, fornendo per ciascun autospazio una base.
(3) Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scriverne la forma diagonale.

Esercizio 9. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 4 & -11 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ e il vettore $v_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(1) Trovare un valore di t per cui il vettore v_t sia autovettore di A.
(2) Determinare il corrispondente autovalore, con relativa molteplicità algebrica e geometrica.
(3) Scrivere la forma diagonale di A.

Esercizio 10. Sullo spazio $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica, sia F l'operatore lineare definito da

$$F(e_1 + e_2) = 4e_2, \;\; F(2e_2) = 7e_2, \;\; F(e_2 + 3e_3) = 3e_1 + 5e_2 + 6e_3$$

(1) Determinare la matrice che rappresenta F nella base canonica assegnata.
(2) Determinare la dimensione e una base dei sottospazi $Ker(F)$ e $Im(F)$.
(3) Determinare gli autovalori di F, specificando la loro molteplicità algebrica e geometrica. Dedurre se F è diagonalizzabile.
(4) Se F è diagonalizzabile trovare una base diagonalizzante per F e scrivere la forma diagonale di F.