Esercitazione II – Scienze e Tecnologie per i media

23 – 11 – 2016

Numeri complessi e applicazioni lineari

Esercizio 1. Eseguire le seguenti divisioni tra numeri complessi
(a) $\frac{1+i}{i}$ (b) $\frac{2i+1}{4i-2}$ (c) $\frac{(i+3)^2}{2i}$ (d) $\frac{6+4i}{(3i-1)^2}$ (e) $\frac{(i+1)^3}{2i}$

Esercizio 2. Calcolare il modulo e l'inverso moltiplicativo di ciascuno dei seguenti numeri complessi.
(a) $z = -1$ (b) $z = \frac{1-2i}{i-2}$ (c) $z = 1 - \frac{i}{i-1}$ (d) $z = \frac{i}{i+1} + \frac{i-2}{i-1}$
(e) $z = i(1+i)^2$ (f) $z = (2i-1)^3$ (g) $z = i(2i-3)$ (h) $z = \frac{i}{2i-3}$
(i) $z = \frac{i}{(i+1)(2i-1)}$ (l) $z = \frac{i(i-1)}{(1+i)^2}$ (m) $z = i + i(1+2i)$ (n) $z = \frac{(3+4i)(2i-1)}{(4i-1)^2}$

Esercizio 3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ il numero complesso $\frac{x-2+ix}{x-3-5i}$ risulta reale.

Esercizio 4. Scrivere in forma polare il numero complesso $z = -1 - i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

(1) Calcolare il suo modulo.
(2) Calcolare z^6.

Esercizio 5. Sia dato il polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

(1) Dimostrare che $p(x)$ non ammette soluzioni reali.

Dette z e w le due radici complesse di $p(x)$:

(1) verificare che $z = \bar{w}$ e che $w = \bar{z}$ e calcolare i numeri reali $|z|$ e $|w|$;
(2) scrivere in forma polare i numeri z e w;
(3) calcolare z^8 e w^{13}.

Esercizio 6. Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei numeri complessi

(1)
$$z = \frac{(1-i\sqrt{3})^{28}}{(1-i)^{50}}$$
(2)
$$z = (1+i)^{11}$$

Esercizio 7. Sia $z = 1 \in \mathbb{C}$.

(1) Calcolare le radici terze di z e verificare che esse formano i veritici di un triangolo equilatero.
(2) Calcolare le radici quarte di z e verificare che esse formano i veritici di un quadrato.
(3) Calcolare le radici quinte di z e verificare che esse formano i veritici di un pentagono regolare.
(4) Calcolare le radici seste di z e verificare che esse formano i veritici di un esagono regolare.

Esercizio 8. Determinare le seguenti radici

(1) $\sqrt{i}$
(2) $\sqrt[3]{-1}$
(3) $\sqrt{2-2i}$
(4) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$
(5) $(1+i)^{-\frac{3}{2}}$
(6) $\sqrt{\frac{1+i}{i}}$
(7) $\sqrt[3]{i-\sqrt{3}}$
(8) $\sqrt{-1-i}$

Esercizio 9. Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$X \longmapsto AX, \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
(2) Calcolare $F(U)$, ove $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 10. Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \longmapsto AX, \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
(2) Calcolare $F(U)$, ove $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Confrontare le dimensioni di U e di $F(U)$.
(3) Calcolare $F(U)$, ove $U = Span\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$. Confrontare le dimensioni di U e di $F(U)$.

Esercizio 11. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine delle applicazioni lineari

(1) $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 12. Siano $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

e $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare determinata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare $Ker(F)$, $Ker(G)$, $Im(F)$, $Im(G)$.
(2) Calcolare la matrice associata ad F e a $G \circ F$.
(3) Calcolare $Ker(G \circ F)$ e $Im(G \circ F)$.

ESERCIZIO 13. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare dominio e codominio di L_A e di L_B, ove L_A eL_B sono rispettivamente le applicazioni lineari associate alle matrici A e B.
(2) Determinare $Ker(L_A)$, $Ker(L_B)$, $Im(L_A)$ e $Im(L_B)$.
(3) Discutere iniettività e suriettività delle due applicazioni lineari.
(4) Calcolare la matrice dell'applicazione $L_A \circ L_B$.

ESERCIZIO 14. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare una base per $Ker(L_A)$ e per $Im(L_A)$.
(2) Scrivere delle equazioni cartesiane per il nucleo e l'immagine.

ESERCIZIO 15. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

(1) Verificare che f è un'applicazione lineare.
(2) Determinare l'immagine del vettore $\bar{v} = (1, 2)$.
(3) Determinare nucleo e immagine di f.
(4) Calcolare $dim(Ker(f))$ e $dim(Im(f))$.

ESERCIZIO 16. Siano dati gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1), \;\; f((0, 1, 0)) = (1, 0), \;\; f((0, 0, 1)) = (1, 1)$$

(1) Determinare la matrice di f.
(2) Determinare la dimensione dei sottospazi $Ker(f)$ e $Im(f)$ e stabilire se f è iniettiva e se f è suriettiva.
(3) Determinare una base per $Ker(f)$ e una base per $Im(f)$.

(4) Dato il sottospazio $W = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, determinare $f(W)$.

(5) Scrivere equazioni parametriche per $f(W)$.

Esercizio 17. Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+x_3\\x_1+x_3\\x_2+x_4\end{pmatrix}$$

e siano dati i sottospazi

$$U = Span\{\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\} \qquad V = Span\{\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}.$$

(1) Determinare $Ker\,F$ e dire se F è iniettiva.
(2) Determinare $Im\,F$ e esibirne una base.
(3) Calcolare $dimU$, $U \cap Ker\,F$, $dim\,F(U)$ ed esibire una base di $F(U)$.
(4) Calcolare $dim\,V$, $V \cap Ker\,F$, $dim\,F(V)$ ed esibire una base di $F(V)$.