Elementi di algebra tensoriale

Filippo Bracci

1. Applicazioni bilineari e prodotto tensoriale di spazi vettoriali

Siano V, W due spazi vettoriali di *dimensione finita* sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 1.1. Una *applicazione bilineare* f su $V \times W$ a valori in uno spazio vettoriale U è una funzione $f : V \times W \to U$ tale che:

(1) $V \ni v \mapsto f(v, w)$ è $\mathbb{K}$-lineare per ogni $w \in W$ fissato, e
(2) $W \ni w \mapsto f(v, w)$ è $\mathbb{K}$-lineare per ogni $v \in V$ fissato.

Se f, g sono applicazioni bilineari su $V \times W$, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la funzione $\lambda f + \mu g$ definita tramite

$$(\lambda f + \mu g)(v, w) := \lambda f(v, w) + \mu g(v, w),$$

è chiaramente una applicazione bilineare su $V \times W$ a valori in U. Pertanto l'insieme delle applicazioni bilineari da $V \times W$ in U forma uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Indichiamo con V^*, W^* i duali di V, W, in altri termini, $V^* = \mathsf{Hom}(V, \mathbb{K})$. Lo spazio delle applicazioni bilineari su $V^* \times W^*$ a valori in $\mathbb{K}$ (dette anche *forme bilineari*), si denota $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Dunque per definizione:

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W := \{f : V^* \times W^* \to \mathbb{K} : f \text{ è bilineare}\}$$

Definiamo adesso una applicazione

$$\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W,$$

tramite

$$(\otimes(v, w))(v^*, w^*) := v^*(v) w^*(w),$$

dove $(v, w) \in V \times W$ e $v^* \in V^*, w^* \in W^*$. Si verifica facilmente che per ogni fissato $(v, w) \in V \times W$, $\otimes(v, w)$ è una forma bilineare su $V^* \times W^*$. In più, per costruzione, si verifica che $\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è una applicazione bilineare.

Definiamo

$$v \otimes w := \otimes(v, w).$$

Gli elementi di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ del tipo $v \otimes w$ si dicono *semplici*.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di W. Allora $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Pertanto,*

$$\dim(V \otimes_{\mathbb{K}} W) = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \dots, v_n\}$ e sia $\{w_1^*, \dots, w_m^*\}$ la base di W^* duale di $\{w_1, \dots, w_m\}$. Sia $f \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Poniamo $a_{ij} := f(v_i^*, w_j^*)$. Sia poi

$$g := \sum_{k=1,\dots,n;h=1,\dots,m} a_{kh} v_k \otimes w_h.$$

Allora per definizione si ha

$$g(v_i^*, w_j^*) = \sum_{k,h} a_{kh} v_k \otimes w_h(v_i^*, w_j^*) = \sum_{k,h} a_{kh} v_i^*(v_k) w_j^*(w_h) = \sum_{k,h} a_{kh} \delta_{ik} \delta_{jh} = a_{ij}.$$

Pertanto $f(v_i^*, w_j^*) = g(v_i^*, w_j^*)$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ e per bilinearità $f = g$. Dunque, $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ è un sistema di generatori per $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Sia ora $0 = \sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j$. Applicando tale identità all'elemento (v_h^*, w_k^*) si ottiene $\lambda_{hk} = 0$ per ogni $h = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$, il che prova che $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ sono linearmente indipendenti e dunque formano una base. □

Dalla proposizione precedente segue che ogni elemento di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ si esprime come combinazione lineare di elementi semplici. Inoltre sempre dalla Proposizione 1.2 segue che $\mathsf{span}(\otimes(V \times W)) = V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

PROPOSIZIONE 1.3 (Proprietà universale del prodotto tensoriale). *Siano U, V, W spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Sia $\phi : V \times W \to U$ una applicazione bilineare. Allora esiste una unica applicazione lineare $\hat{\phi} : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to U$ tale che $\phi = \hat{\phi} \circ \otimes$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni elemento in $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è combinazione lineare di elementi semplici, basta definire $\hat{\phi}$ sugli elementi semplici ed estenderla per linearità. Definiamo

$$\hat{\phi}(v \otimes w) := \phi(v, w).$$

Si verifica facilmente che $\hat{\phi}$ ha le proprietà richieste. □

Caratterizziamo adesso il prodotto tensoriale tramite la proprietà universale data dalla proposizione precedente.

TEOREMA 1.4. *Siano V, W, P tre spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Supponiamo che esista $\pi : V \times W \to P$ applicazione bilineare tale che*

(1) $\mathsf{span}(\pi(V \times W)) = P$,
(2) *per ogni spazio vettoriale finito dimensionale U e ogni applicazione bilineare $\phi : V \times W \to U$ esiste una unica applicazione lineare $\tilde{\phi} : P \to U$ tale che $\phi = \pi \circ \tilde{\phi}$.*

Allora esiste $\sigma : V \otimes W \to P$ isomorfismo tale che $\pi = \sigma \circ \otimes$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma := \hat{\pi} : V \otimes W \to P$ l'applicazione lineare definita dalla Proposizione 1.3. E sia $\tilde{\otimes} : P \to V \otimes W$ l'applicazione lineare data dalla proprietà (2) nelle ipotesi del teorema.

Proviamo che $\tilde{\otimes} \circ \sigma = \mathsf{id}_{V \otimes_{\mathbb{K}} W}$. Sia $t \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Poiché t è combinazione lineare di elementi semplici, possiamo scrivere $t = \sum v_j \otimes w_j$. Dunque, tenendo presente che $\sigma \circ \otimes = \hat{\pi} \circ \otimes = \pi$ e che $\tilde{\otimes} \circ \pi = \otimes$, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\otimes} \circ \sigma(t) &= \sum_j \tilde{\otimes} \circ \sigma(v_j \otimes w_j) = \sum_j \tilde{\otimes} \circ \sigma \circ \otimes(v_j, w_j) = \sum_j \tilde{\otimes} \circ \pi(v_j, w_j) \\ &= \sum_j \otimes(v_j, w_j) = \sum v_j \otimes w_j = t. \end{aligned}$$

Pertanto σ è iniettiva. Poiché per definizione $\sigma(V \otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathsf{span}(\pi(V \times W))$ e per la proprietà (1) nelle ipotesi del teorema, $\mathsf{span}(\pi(V \times W)) = P$, ne segue che σ è anche suriettiva. Da cui segue il risultato. $\square$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà:

(1) $V \otimes_{\mathbb{K}} W \simeq W \otimes_{\mathbb{K}} V$ (tramite $v \otimes w \mapsto w \otimes v$),
(2) $(V \otimes_{\mathbb{K}} W) \otimes_{\mathbb{K}} U \simeq V \otimes_{\mathbb{K}} (W \otimes_{\mathbb{K}} U)$ (tramite $(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u)$),
(3) $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \simeq V$ (tramite $v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$).

In particolare grazie alla proprietà (2), si può parlare di prodotto tensoriale di più di due spazi vettoriali senza doversi preoccupare dell'ordine in cui tale prodotto viene preso. Ragionando come in Proposizione 1.2 si ha:

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano $V_1, \ldots, V_m$ degli spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Allora $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V_m$ è isomorfo allo spazio delle forme r-multilineari su $V_1^* \times \ldots \times V_m^*$. Inoltre, per $h = 1, \ldots, m$ sia $\{v_1^h, \ldots, v_{n_h}^h\}$ una base di V_h. Allora $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V_m$ ha base data da $\{v_{j_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{j_m}^m\}$ al variare di $j_h \in \{1, \ldots, n_h\}$, $h = 1, \ldots, m$.*

ESEMPIO 1.6. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Si può definire $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $2n$. D'altra parte, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ data ponendo

$$\alpha(\sum_j v_j \otimes \lambda_j) := \sum_j v_j \otimes (\alpha \lambda_j),$$

per $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\sum_j v_j \otimes \lambda_j \in V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Allora per quanto visto, $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes i\}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. In particolare dunque $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes i\}$ è un sistema di generatori di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Poiché $v \otimes i = i(v \otimes 1)$, risulta che $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$ generano $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Proviamo che essi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$ e dunque sono una base di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. In effetti, se $\sum_{j=1}^n \lambda_j (v_j \otimes 1) = 0$, scrivendo $\lambda_j = x_j + i y_j$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^n (x_j(v_j \otimes 1) + y_j(v_j \otimes i)) = 0,$$

che implica $x_j = y_j = 0$ per ogni j.

Siano adesso V_1, V_2, W_1, W_2 spazi vettoriali finito dimensionali e siano $f_1 : V_1 \to W_1$, $f_2 : V_2 \to W_2$ applicazioni lineari. Si può definire una applicazione lineare

$$f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \to W_1 \otimes_{\mathbb{K}} W_2,$$

definendola sugli elementi semplici $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ tramite $f_1 \otimes f_2(v_1 \otimes v_2) := f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$ ed estendendola per linearità a tutto $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$.

Sia $\mathcal{B}_i^V := \{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\}$ un base di V_i e $\mathcal{B}_i^W := \{w_1^i, \dots, w_{m_i}^i\}$ una base di W_i ($i = 1, 2$). Sia $M_1 = (a_{ij})$ la matrice associata a f_1 nelle basi $\mathcal{B}_1^V$, $\mathcal{B}_1^W$ e similmente sia $M_2 = (b_{ij})$ la matrice associata a f_2 nelle basi $\mathcal{B}_2^V$, $\mathcal{B}_2^W$. Allora

$$f_1 \otimes f_2(v_i^1 \otimes v_j^2) = f_1(v_i^1) \otimes f_2(v_j^2) = \left(\sum_{k=1}^{m_1} a_{ki} w_k^1 \right) \otimes \left(\sum_{h=1}^{m_2} b_{hj} w_h^2 \right) = \sum_{h,k} a_{ki} b_{hj} w_k^1 \otimes w_h^2.$$

Pertanto, la matrice associata a $f_1 \otimes f_2$ nelle basi $\{v_1^1 \otimes v_1^2, \dots, v_1^1 \otimes v_{n_2}^2 \dots, v_{n_1}^1 \otimes v_{n_2}^2\}$ e $\{w_1^1 \otimes w_1^2, \dots, w_1^1 \otimes w_{m_2}^2, \dots, w_{m_1}^1 \otimes w_{m_2}^2\}$ è data dal prodotto di Kronecker $M_1 \otimes M_2$ definito tramite

$$M_1 \otimes M_2 := \begin{pmatrix} a_{11} M_2 & \dots & a_{1n_1} M_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1} M_2 & \dots & a_{m_1 n_1} M_2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 1.7. *Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Allora $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è isomorfo a $\mathsf{Hom}(V^*, W)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo una applicazione lineare $\Phi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to \mathsf{Hom}(V^*, W)$ sugli elementi semplici (e poi estendiamola per linearità) tramite

$$\Phi(v \otimes w)(\varphi) := \varphi(v) w, \quad \forall \varphi \in V^*.$$

Verifichiamo che Φ è iniettiva. Sarà quindi l'isomorfismo richiesto poiché $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ e $\mathsf{Hom}(V^*, W)$ hanno le stesse dimensioni.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Sia $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \dots, v_n\}$. Allora $\{v_1 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Per provare che Φ è iniettiva basta provare che $\{\Phi(v_1 \otimes w_1), \dots, \Phi(v_n \otimes w_m)\}$ sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathsf{Hom}(V^*, W)$. Sia $\sum a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j) = 0$ (qua 0 è il morfismo nullo da V^* in W). Allora per $k = 1, \dots, n$

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j)(v_k^*) = \sum_{ij} a_{ij} v_k^*(v_i) w_j = \sum_{ij} a_{ij} \delta_{ik} w_j = \sum_j a_{kj} w_j,$$

e questo implica $a_{kj} = 0$ per ogni k, j essendo $\{w_1, \dots, w_m\}$ linearmente indipendenti. Pertanto Φ è iniettiva. $\square$

2. Algebra tensoriale di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale su $\mathbb{K}$. Si definisce $T^0(V) = \mathbb{K}$ e, per $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$,

$$T^r(V) := \underbrace{V \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V}_{r}.$$

Gli elementi di $T^r(V)$ si dicono *tensori controvarianti di grado* r. Similmente per $s \in \mathbb{N}$ si definisce

$$T_s(V) := T^s(V^*).$$

Gli elementi di $T_s(V)$ si chiamano *tensori covarianti di grado* s. Si pone poi

$$T^r_s(V) := T^r(V) \otimes_{\mathbb{K}} T_s(V).$$

DEFINIZIONE 2.1. Lo spazio vettoriale

$$T(V) := \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V)$$

si dice l'*algebra tensoriale* di V.

L'algebra tensoriale di V^* si chiama anche l'algebra tensoriale duale di V, per definizione $T(V^*) = \bigoplus_{s \geq 0} T_s(V)$. Si ha poi l'*algebra tensoriale mista*

$$\mathbb{T}(V) := \bigoplus_{r \geq 0, s \geq 0} T^r(V) \otimes_{\mathbb{K}} T_s(V).$$

Presi $a, b \in T(V)$, se $a \in T^p(V)$ e $b \in T^q(V)$, allora si può definire in modo naturale il "prodotto" $a \otimes b \in T^{p+q}(V)$. Più precisamente, se $a = \sum v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p}$ e se $b = \sum v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_q}$, si definisce

$$a \otimes b := \sum v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_q}.$$

La dimostrazione del seguente risultato è semplice e viene lasciata per esercizio:

PROPOSIZIONE 2.2. *L'algebra tensoriale $T(V)$ munita del prodotto $\otimes$ ammette una naturale struttura di anello associativo, tale che, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e $a, b \in T(V)$ risulta*

$$\alpha(a \otimes b) = (\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b).$$

Uno spazio vettoriale che abbia una struttura di anello associativo per cui il prodotto per uno scalare è legato al prodotto di elementi dell'anello come nella proposizione precedente si chiama una *algebra*. Ciò giustifica la nomenclatura per $T(V)$.

In modo simile si vede che $T(V^*)$ è un'algebra. Similmente si può dotare $\mathbb{T}(V)$ della struttura di algebra ponendo $(v_1 \otimes w_2^*) \otimes (v_2 \otimes w_2^*) = v_1 \otimes v_2 \otimes w_1^* \otimes w_2^*$ per $v_1 \otimes w_2^* \in T^r_s(V)$ e $v_2 \otimes w_2^* \in T^p_q(V)$.

Siano $s, r > 0$ e siano $0 < i \leq r$ e $0 < j \leq s$. Si definisce una applicazione lineare $c_{ij} : T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s-1}(V)$, detta *contrazione*, nel modo seguente (il simbolo $\hat{}$ significa rimosso):

$$c_{ij}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w_1^* \otimes \ldots \otimes w_s^*) := \\ w_j^*(v_i) v_1 \otimes \ldots \otimes \hat{v_i} \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w_1^* \otimes \ldots \otimes \hat{w_j^*} \otimes \ldots \otimes w_s^*$$

ESEMPIO 2.3. Per la Proposizione 1.7 esiste un isomorfismo $\Phi : T^1_1(V) \to \mathsf{End}(V)$. Sia $f \in \mathsf{End}(V)$ Allora

$$\mathsf{tr}(f) = c_{11}(\Phi^{-1}(f)).$$

Infatti, sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e sia $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base di V^* duale alla base scelta di V. Sia $M = (a_{ij})$ la matrice associata a f. Allora $\Phi^{-1}(f) = \sum_{ij} a_{ij} v_i \otimes v_j^*$, da cui si ha

$$c_{11}(\Phi^{-1}(f)) = \sum_{ij} a_{ij} c_{11}(v_i \otimes v_j^*) = \sum_{ij} a_{ij} v_j^*(v_i) = \sum_{ij} a_{ij}\delta_{ij} = \sum_i a_{ii} = \mathsf{tr}(f).$$

3. Algebra Esterna

Fissato $r \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\Sigma(r)$ il gruppo delle permutazioni su $\{1, \ldots, r\}$.

DEFINIZIONE 3.1. Per $\sigma \in \Sigma(r)$ definiamo $L_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ sugli elementi semplici tramite

$$L_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}$$

ed estendiamola per linearità.

OSSERVAZIONE 3.2. L'applicazione $L_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ è un isomorfismo. Infatti data una base di $T^r(V)$ come nella Proposizione 1.5, si verifica facilmente che L_σ permuta gli elementi della base.

Dati $\sigma, \tau \in \Sigma(r)$ si ha

$$L_\tau \circ L_\sigma = L_{\tau\sigma}. \tag{3.1}$$

DEFINIZIONE 3.3. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce l'applicazione lineare $A_r : T^r(V) \to T^r(V)$ tramite

$$A_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma.$$

L'applicazione lineare $A := \oplus_{r \geq 0} A_r : T(V) \to T(V)$ si chiama l'*alternatore*.

Per definizione $A|_{T^r(V)} = A_r$. Osserviamo che per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $\tau \in \Sigma(r)$ risulta

$$A_r \circ L_\tau = \mathsf{sgn}(\tau) A_r. \tag{3.2}$$

Infatti:

$$
\begin{aligned}
A_r \circ L_\tau &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma \circ L_\tau \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_{\sigma\tau} \\
&= \mathsf{sgn}(\tau) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma\tau) L_{\sigma\tau} = \mathsf{sgn}(\tau) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma\tau \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma\tau) L_{\sigma\tau} = \mathsf{sgn}(\tau) A_r.
\end{aligned}
$$

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia $A : T(V) \to T(V)$ l'alternatore. Allora $A^2 = A$. In particolare $\mathsf{Im}\, A = \ker(A - \mathsf{id})$ e $T(V) = \ker A \oplus \mathsf{Im}\, A$.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di A, occorre e basta provare che $A_r^2 = A_r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. Ma

$$
\begin{aligned}
A_r^2 = A_r \circ A_r &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) A_r \circ L_\sigma \overset{(3.2)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)\mathsf{sgn}(\sigma) A_r \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} A_r = \frac{1}{r!} r! A_r = A_r.
\end{aligned}
$$

Se $w \in \mathsf{Im}\, A$, allora esiste $w' \in T(V)$ tale che $Aw' = w$. Dunque $w = Aw' = A^2 w' = A(Aw') = Aw$ che prova che $Aw = w$. In altri termini $A|_{\mathsf{Im}\, A} = \mathsf{id}$ e $\mathsf{Im}\, A$ coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 1. Pertanto $\mathsf{Im}\, A \cap \ker A = \{0\}$ e dunque $T(V) = \ker A \oplus \mathsf{Im}\, A$. $\square$

OSSERVAZIONE 3.5. Se $r > n = \dim V$ allora $T^r(V) \subset \ker A$. Infatti, sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e sia $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}\}$ la base di $T^r(V)$ ottenuta al variare di $i_1, \ldots, i_r$ tra 1 e n. Proviamo che $A(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$ per ogni indice. Poiché $r > n$, esistono almeno due indici uguali, diciamo i_a, i_b. Sia $\tau \in \Sigma(r)$ la permutazione che scambia a con b e lascia fissi gli altri elementi. Per ogni permutazione $\sigma \in \Sigma(r)$ risulta dunque

$$L_\sigma(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = L_{\sigma\tau}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}),$$

ma le due permutazioni σ e $\sigma\tau$ hanno segno opposto. Pertanto $A_r(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$, come enunciato.

DEFINIZIONE 3.6. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$\Lambda^r(V) := \mathsf{Im}\, A_r = A(T^r(V)).$$

Gli elementi di $\Lambda^r(V)$ si dicono *r-forme*. Si definisce poi l'*algebra esterna* di V tramite

$$\Lambda(V) := \mathsf{Im}\, A = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r(V).$$

Per l'Osservazione 3.5, $\Lambda^r(V) = 0$ per $r > \dim V$. In particolare dunque

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{\dim V} \Lambda^r(V).$$

Sia adesso $\mathcal{I}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v$. In altre parole un elemento di $\mathcal{I}$ è una combinazione lineare finita di elementi del tipo $v_1 \otimes \ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots \otimes v_k$ in cui almeno due elementi consecutivi sono uguali.

LEMMA 3.7. $\ker A = \mathcal{I}$.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando in modo analogo a quanto fatto nell'Osservazione 3.5 si vede che $\mathcal{I} \subseteq \ker A$.

Per provare il viceversa, sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{I}$ la proiezione canonica che ad un elemento $w \in T(V)$ associa la sua classe di equivalenza modulo $\mathcal{I}$. Poiché $\mathcal{I}$ è un ideale, $T(V)/\mathcal{I}$ possiede una struttura di anello associativo, il cui prodotto denotiamo con $\times$, e π è un omomorfismo suriettivo di anelli. Dati $v, w \in V$, si ha

$$\begin{aligned} 0 =& \pi((v+w) \otimes (v+w)) = \pi(v \otimes v + v \otimes w + w \otimes v + w \otimes w) \\ &= \pi(v \otimes v) + \pi(v \otimes w) + \pi(w \otimes v) + \pi(w \otimes w) = \pi(v) \times \pi(w) + \pi(w) \times \pi(v), \end{aligned}$$

da cui segue che $\pi(v) \times \pi(w) = -\pi(w) \times \pi(v)$.

Pertanto, fissato $r \in \mathbb{N}$ e dati $\sigma \in \Sigma(r)$ e $v_1, \ldots, v_r \in V$, si ha

$$\begin{aligned} \pi(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}) &= \pi(v_{\sigma(1)}) \times \ldots \times \pi(v_{\sigma(r)}) \\ &= \mathsf{sgn}(\sigma)\pi(v_1) \times \ldots \times \pi(v_r) = \mathsf{sgn}(\sigma)\pi(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r). \end{aligned}$$

Ovvero, $\pi \circ L_\sigma = \mathsf{sgn}(\sigma)\pi$. Dunque,

$$\pi \circ A_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)\pi \circ L_\sigma = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)^2 \pi = \pi.$$

Questo prova che $\ker A \subseteq \ker \pi = \mathcal{I}$. □

COROLLARIO 3.8. *Sia* $w \in T(V)$ *e sia* $v \in \ker A$. *Allora* $w \otimes v \in \ker A$ *e* $v \otimes w \in \ker A$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti per il Lemma 3.7 risulta $\ker A = \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ è un ideale bilatero (dunque chiuso per moltiplicazione a destra e sinistra nell'anello $T(V)$. □

OSSERVAZIONE 3.9. Si noti che $A_r(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = 0$ se $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$. Infatti, sia $\sigma \in \Sigma(r)$ una permutazione tale che $\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$. Allora per il Lemma 3.7 e per la (3.2)

$$0 = A_r(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}) = \mathsf{sgn}(\sigma) A_r(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r).$$

Si può dare una struttura di anello associativo (di fatto algebra) su $\Lambda(V)$ definendo un prodotto (detto *prodotto esterno*) nel modo seguente: siano $v, w \in \Lambda(V)$, allora

$$v \wedge w := A(v \otimes w).$$

Si osservi che la definizione è ben posta, poiché $\Lambda(V) = \mathsf{Im}\, A \subset T(V)$ e dunque è ben definito $a \otimes b$ per $a, b \in \Lambda(V)$. Tale prodotto potrebbe non stare in $\Lambda(V)$ e applichiamo dunque A la cui immagine è proprio $\Lambda(V)$.

PROPOSIZIONE 3.10. *Lo spazio vettoriale* $\Lambda(V)$ *con il prodotto* $\wedge$ *è un anello associativo tale che, per ogni* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $a, b \in \Lambda(V)$ *risulta*

$$\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b).$$

DIMOSTRAZIONE. Per provare che $\Lambda(V)$ è un anello associativo, essendo già un gruppo abeliano rispetto alla somma, occorre e basta provare che $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ per $a, b, c \in \Lambda(V)$ e che valgono le proprietà distributive rispetto alla somma: $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$ e $(a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$. Le proprietà distributive sono di immediata verifica poiché $\otimes$ è bilineare e A è lineare. Per verificare l'associatività, si nota che, dati $a, b, c \in \Lambda(V)$ risulta

$$A(A(a \otimes b) \otimes c) = A(a \otimes b \otimes c). \tag{3.3}$$

Infatti, per la Proposizione 3.4 risulta $a \otimes b = A(a \otimes b) + v$ con $A(v) = 0$. Dunque

$$A(a \otimes b \otimes c) = A((A(a \otimes b) + v) \otimes c) = A(A(a \otimes b) \otimes c) + A(v \otimes c),$$

e $A(v \otimes c) = 0$ per il Corollario 3.8. Similmente

$$A(a \otimes A(b \otimes c)) = A(a \otimes b \otimes c). \tag{3.4}$$

Dalle (3.3) e (3.4) si ha

$$a \wedge (b \wedge c) = A(a \otimes A(b \otimes c)) = A(a \otimes b \otimes c) = A(A(a \otimes b) \otimes c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Infine dalla bilinearità di $\otimes$ e dalla linearità di A si verifica facilmente che per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e $a, b \in \Lambda(V)$ vale $\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b)$. □

PROPOSIZIONE 3.11. *L'algebra esterna* $\Lambda(V)$ *è isomorfa come anello associativo all'anello* $T(V)/\mathcal{I}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.4, risulta $T(V) = \mathsf{Im}\, A \oplus \ker A$. Pertanto (come isomorfismo di spazi vettoriali)

$$\Lambda(V) \simeq T(V)/\ker A.$$

Per il Lemma 3.7 si ha $\ker A = \mathcal{I}$, e dunque risulta $\Lambda(V) \simeq T(V)/\mathcal{I}$ come spazi vettoriali. Sia $\rho : \Lambda(V) \to T(V)/\mathcal{I}$ tale isomorfismo. Proviamo che ρ è anche un isomorfismo di anelli. Per questo occorre e basta verificare che

$$\rho(a \wedge b) = \rho(a) \times \rho(b),$$

per ogni $a, b \in \Lambda(V)$, essendo $\times$ il prodotto in $T(V)/\mathcal{I}$. Sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{I}$. Per definizione di ρ, si ha $\rho(A(a)) = \pi(a)$. Pertanto

$$\rho(a \wedge b) = \rho(A(a \otimes b)) = \pi(a \otimes b) = \pi(a) \times \pi(b) = \rho(A(a)) \times \rho(A(b)) = \rho(a) \times \rho(b),$$

e la dimostrazione è conclusa. □

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano* $a \in \Lambda^p(V)$ *e* $b \in \Lambda^q(V)$. *Allora*

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni elemento di $\Lambda(V)$ è combinazione lineare di immagini mediante A di elementi semplici, occorre e basta provare la proposizione per $a = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ e $b = w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$.

Osserviamo preliminarmente che, dati $v, w \in V$, dalla dimostrazione del Lemma 3.7 si vede che $\pi(v) \times \pi(w) = -\pi(w) \times \pi(v)$ in $T(V)/\mathcal{I}$. Essendo $T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$ come anelli, per la Proposizione 3.11 risulta che, dati $v, w \in \Lambda^1(V)$ si ha $v \wedge w = -w \wedge v$. Ma allora, utilizzando l'associatività del prodotto $\wedge$,

$$\begin{aligned}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) &= v_1 \wedge \ldots \wedge (v_p \wedge w_1) \wedge \ldots \wedge w_q \\ &= -v_1 \wedge \ldots \wedge (w_1 \wedge v_p) \wedge \ldots \wedge w_q = \ldots \\ &= (-1)^p w_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_q = \ldots \\ &= (-1)^{pq} (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) \wedge (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p),\end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. □

COROLLARIO 3.13. *Risulta* $a \wedge a = 0$ *per ogni* $a \in \Lambda^{2r+1}(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione precedente si ha

$$a \wedge a = (-1)^{(2r+1)^2} a \wedge a = -a \wedge a,$$

da cui segue $a \wedge a = 0$. □

OSSERVAZIONE 3.14. Se $\alpha \in \Lambda^{2r}(V)$, in generale, $\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Ad esempio, se $\{v_1, \ldots, v_4\}$ sono vettori linearmente indipendenti in V, posto $\alpha = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$, si ha (si veda il Corollario 3.19)

$$(v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) \wedge (v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) = 2 v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 \neq 0.$$

DEFINIZIONE 3.15. Una forma r-multilineare f su V^* si dice *alternante* se per ogni $\sigma \in \Sigma(r)$ vale

$$f(v^*_{\sigma(1)}, \ldots, v^*_{\sigma(r)}) = \mathsf{sgn}(\sigma) f(v^*_1, \ldots, v^*_r).$$

Chiaramente, l'insieme delle forme r-multilineari alternanti su V^* forma un sottospazio dello spazio delle forme r-multilineari su V^*. Ricordiamo che $T^r(V)$ è identificato con lo spazio delle forme r-multilineari su V^*.

TEOREMA 3.16. $\Lambda^r(V) \subset T^r(V)$ *è identificato con il sottospazio delle forme* r*-multilineari alternanti su* V^**. Inoltre, se* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è una base di* V*, allora* $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}$ *è una base di* $\Lambda^r(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di $\Lambda^r(V)$ sono combinazione lineare di immagini mediante A di elementi semplici, occorre e basta provare che elementi del tipo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ danno luogo a forme r-multilineari alternanti su V^*. Dato $\tau \in \Sigma(r)$, ricordando che $A \circ L_\tau = \mathsf{sgn}(\tau) A$, si ha

$$
\begin{aligned}
&(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)}) = A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)})(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) w^*_{\tau(1)}(v_{\sigma(1)}) \ldots w^*_{\tau(r)}(v_{\sigma(r)}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) w^*_1(v_{\sigma(\tau^{-1}(1))}) \ldots w^*_r(v_{\sigma(\tau^{-1}(r))}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(r)})(w^*_1, \ldots, w^*_r) \\
&= A(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(r)})(w^*_1, \ldots, w^*_r) = \mathsf{sgn}(\tau^{-1}) A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(w^*_1, \ldots, w^*_r) \\
&= \mathsf{sgn}(\tau)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)(w^*_1, \ldots, w^*_r),
\end{aligned}
$$

pertanto $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ è una forma alternante.

Proviamo adesso che ogni forma r-multilineare alternante su V^* proviene da una r-forma di V. Per farlo, osserviamo preliminarmente che $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}$ è una base di $\Lambda^r(V)$. Infatti, poiché $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}\}$ al variare di $i_1, \ldots, i_r$ in $\{1, \ldots, n\}$ formano una base di $T(V)$, la loro immagine mediante A_r è un insieme di generatori di $\Lambda^r(V)$. Ma, dato che $A_r(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$ se $i_l = i_m$ per qualche $i \neq m$ (per l'Osservazione 3.9) e dato che $A_r \circ L_\sigma = \mathsf{sgn}(\sigma) A_r$, risulta che in effetti $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}$ è un insieme di generatori di $\Lambda^r(V)$. Per provare che tali elementi sono linearmente indipendenti, supponiamo che

$$
\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r} = 0.
$$

Sia $\{v^*_1, \ldots, v^*_n\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Fissati $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$, si ha

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}(v^*_{k_1}, \ldots, v^*_{k_r}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v^*_{k_1}(v_{i_1}) \ldots v^*_{k_r}(v_{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} \delta_{k_1 i_1} \ldots \delta_{k_r i_r} = \lambda_{k_1 \ldots k_r}.
\end{aligned}
$$

Ciò prova che $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}$ sono linearmente indipendenti.

Sia ora φ una forma r-multilineare alternante su V^*. Per $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n$ poniamo $a_{k_1 \ldots k_r} := \varphi(v^*_{k_1}, \ldots, v^*_{k_r})$. Si noti che, poiché la forma φ è alternante, per ogni $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$
\varphi(v^*_{i_1}, \ldots, v^*_{i_r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists l \neq m \text{ tali che } i_l = i_m \\ \mathsf{sgn}(\sigma) a_{k_1 \ldots k_r} & \text{se } \exists \sigma \in \Sigma(r) : \sigma(i_j) = k_j \text{ e } 1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n \end{cases}
$$

Poniamo ora $f := r! \sum_{1\leq k_1<\ldots<k_r\leq n} a_{k_1\ldots k_r} v_{k_1}\wedge\ldots\wedge v_{k_r}$. Siano $i_1,\ldots,i_r\in\{1,\ldots,n\}$ fissati. Si osservi che se $i_l = i_m$ per qualche $m\neq l$, allora $f(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r}) = 0$. Supponiamo dunque $i_l\neq i_m$ per $l\neq m$. Allora esistono unici degli indici $1\leq \tilde{k}_1<\ldots<\tilde{k}_r\leq n$ ed esiste una unica permutazione $\tilde{\sigma}\in\Sigma(r)$ tale che $\tilde{\sigma}(\tilde{k}_j) = i_j$ $(j=1,\ldots,r)$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
f(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r}) &= r!\sum_{1\leq k_1<\ldots<k_r\leq n} a_{k_1\ldots k_r} v_{k_1}\wedge\ldots\wedge v_{k_r}(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r})\\
&= r!\sum_{1\leq k_1<\ldots<k_r\leq n} a_{k_1\ldots k_r} A(v_{k_1}\otimes\ldots\otimes v_{k_r})(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r})\\
&= r!\sum_{1\leq k_1<\ldots<k_r\leq n} a_{k_1\ldots k_r}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)}\mathsf{sgn}(\sigma)v^*_{i_1}(v_{\sigma(k_1)})\ldots v^*_{i_r}(v_{\sigma(k_r)})\\
&= r!\sum_{1\leq k_1<\ldots<k_r\leq n} a_{k_1\ldots k_r}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)}\mathsf{sgn}(\sigma)\delta_{i_1\sigma(k_1)}\ldots\delta_{i_r\sigma(k_r)} = r!a_{\tilde{k}_1\ldots\tilde{k}_r}\frac{1}{r!}\mathsf{sgn}(\tilde{\sigma})\\
&= \mathsf{sgn}(\tilde{\sigma})a_{\tilde{k}_1\ldots\tilde{k}_r}.
\end{aligned}$$

Pertanto $f=\varphi$ (essendo uguali sugli elementi di una base di V^* ed essendo multilineari). Ciò prova il teorema. $\square$

OSSERVAZIONE 3.17. Nel corso della dimostrazione precedente si è visto che, se $a\in\Lambda^p(V), b\in\Lambda^q(V)$ allora

$$a\wedge b(w^*_1,\ldots,w^*_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\Sigma(p+q)}\mathsf{sgn}(\sigma)a(w^*_{\sigma(1)},\ldots,w^*_{\sigma(p)})b(w^*_{\sigma(p+1)},\ldots,w^*_{\sigma(p+q)})$$

Come corollario immediato del teorema precedente si ha il calcolo della dimensione dello spazio delle r-forme:

COROLLARIO 3.18. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$. Allora per $0\leq r\leq n$ si ha* $\dim\Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$. *Inoltre* $\dim\Lambda(V) = 2^n$.

COROLLARIO 3.19. *Siano $v_1,\ldots,v_r\in V$. Allora $\{v_1,\ldots,v_r\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_1\wedge\ldots\wedge v_r\neq 0$ in $\Lambda^r(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\{v_1,\ldots,v_r\}$ sono linearmente indipendenti allora si può completare l'insieme ad una base di V e dunque per il teorema precedente $v_1\wedge\ldots\wedge v_r$ è un elemento di una base di $\Lambda^r(V)$ e pertanto non è zero. Viceversa, supponiamo che $\{v_1,\ldots,v_r\}$ siano linearmente dipendenti. A meno di cambiare l'ordine possiamo supporre $v_1 = \sum_{j=2}^r\lambda_j v_j$. Ma allora

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_r = \sum_{j=2}^r\lambda_j v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r = 0$$

poiché, per $j=2,\ldots,n$, si ha

$$v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r = \pm v_j\wedge v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge\hat{v}_j\wedge\ldots\wedge v_n = A(v_j\otimes v_j\otimes v_2\otimes\ldots\otimes\hat{v}_j\otimes\ldots\otimes v_n) = 0$$

per la Proposizione 3.12 e il Lemma 3.7. □

Sia adesso $f : V \to V$ una applicazione lineare. Come visto in precedenza f si estende ad un endomorfismo (che chiamiamo sempre $f : T(V) \to T(V)$) che è anche un omomorfismo di anelli. Pertanto definisce un omomorfismo $T(V) \to T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$ tramite la composizione $\pi \circ f$. Ora, $f(v \otimes v) := f(v) \otimes f(v)$. Pertanto $f(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. E dunque $\pi \circ f$ definisce un omomorfismo di anelli (che denotiamo sempre con la stessa lettera) $f : \Lambda(V) \simeq T(V)/\mathcal{I} \to T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$. In altri termini sugli elementi semplici f è definita da

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = A(f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_r)) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_r).$$

PROPOSIZIONE 3.20. *Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e M è la matrice associata ad f in tale base, risulta*

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det(M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $M = (a_{ij})$. Dunque

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n) = \left(\sum_{h=1}^{n} a_{h1} v_h\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{h=1}^{n} a_{hn} v_h\right)$$

$$= \sum_{h_1,\ldots,h_n=1}^{n} a_{h_1 1} \ldots a_{h_n n} v_{h_1} \wedge \ldots \wedge v_{h_n} = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mathsf{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

□

COROLLARIO 3.21. *Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Siano $w_1, \ldots, w_n \in V$. Supponiamo che $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Sia $M = (a_{ij})$. Allora $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \det(M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $f : V \to V$ definita tramite $f(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$ e si estenda a V per linearità. Il risultato segue allora dalla proposizione precedente. □

4. Algebra Simmetrica

DEFINIZIONE 4.1. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce l'applicazione lineare $S_r : T^r(V) \to T^r(V)$ tramite

$$S_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} L_\sigma.$$

L'applicazione lineare $S := \oplus_{r \geq 0} S_r : T(V) \to T(V)$ si chiama il *simmetrizzatore.*

PROPOSIZIONE 4.2. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $S_r \circ L_\sigma = L_\sigma \circ S_r = S_r$ *per ogni* $\sigma \in \Sigma(r)$.
(2) $S^2 = S$
(3) $S_r \circ A_r = A_r \circ S_r = 0$ *per* $r \geq 2$.

DIMOSTRAZIONE. (1) è ovvia. (2) segue subito da (1) poiché
$$S_r \circ S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} L_\sigma \circ S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} S_r = S_r.$$
Per la (3), si ha
$$S_r \circ A_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) S_r \circ L_\sigma \overset{(1)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) S_r = S_r \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) = 0,$$
dove si è usato il fatto che per $r \geq 2$ il numero delle permutazioni pari è uguale al numero delle permutazioni dispari e pertanto $\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) = 0$. Similmente si prova che $A_r \circ S_r = 0$. $\square$

OSSERVAZIONE 4.3. Per $r = 1$ risulta $A_1(v) = S_1(v) = v$.

COROLLARIO 4.4. $T(V) = \mathsf{Im}\, S \oplus \ker S$. *Inoltre* $\mathsf{Im}\, S = \ker(S - \mathsf{id})$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (2) della proposizione precedente si ha $S^2 = S$. La prova è quindi del tutto analoga a quella della Proposizione 3.4 e la omettiamo. $\square$

Sia $\mathcal{K}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \wedge w$. In altri termini, $\mathcal{K}$ è l'ideale bilatero generato da $\mathsf{Im}\, A_2 = \Lambda^2(V)$ in $T(V)$.

LEMMA 4.5. $\ker S = \mathcal{K}$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento è simile a quello della prova del Lemma 3.7 e quindi ne diamo velocemente l'idea. Si vede facilmente che $\mathcal{K} \subseteq \ker S$.

Per il viceversa, sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{K}$ la proiezione canonica e sia $\times$ la moltiplicazione in $T(V)/\mathcal{K}$. Dalla
$$0 = \pi(v \wedge w) = \pi(A(v \otimes w)) = \frac{1}{2}(\pi(v \otimes w) - \pi(w \otimes v)),$$
si ricava che $T(V)/\mathcal{K}$ è un anello commutativo. Da cui $\pi \circ S = \pi$ e pertanto $\ker S \subseteq \mathcal{K}$. $\square$

DEFINIZIONE 4.6. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce
$$S^r(V) := \mathsf{Im}\, S_r = S(T^r(V)).$$
Gli elementi di $S^r(V)$ si dicono *r-tensori simmetrici*. Si definisce poi l'*algebra simmetrica* di V tramite
$$S(V) := \mathsf{Im}\, S = \bigoplus_{r \geq 0} S^r(V).$$

Si può definire un prodotto su $S(V)$ tramite
$$a \odot b := S(a \otimes b),$$
essendo $a, b \in S(V)$.

Utilizzando il Lemma 4.5 si prova il seguente risultato similmente a quanto fatto per l'alternatore:

TEOREMA 4.7. *Il prodotto $\odot$ rende $S(V)$ un anello associativo commutativo, isomorfo a $T(V)/\mathcal{K}$.*

In modo simile a quanto fatto per le r-forme, si può dimostrare che gli r-tensori simmetrici coincidono con le forme r-multilineari simmetriche su V^*. Dove, una forma r-multilineare f su V^* si dice *simmetrica* se $f(v^*_{\sigma(1)}, \dots, v^*_{\sigma(r)}) = f(v^*_1, \dots, v^*_r)$ per ogni $\sigma \in \Sigma(r)$. Pertanto:

TEOREMA 4.8. *$S^r(V) \subset T^r(V)$ è identificato con il sottospazio delle forme r-multilineari simmetriche su V^*. Inoltre, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $\{v_{i_1} \odot \dots \odot v_{i_r}\}_{1 \le i_1 \le \dots \le i_r \le n}$ è una base di $S^r(V)$.*

Come conseguenza si ha che $\dim S^r(V) = \binom{n+r-1}{r}$ e che $S(V)$ ha dimensione infinita.

Dalla Proprietà (3) della Proposizione 4.2 segue anche che $\Lambda(V) \subset \ker S$ e $S(V) \subset \ker A$, ma, per $r \ge 3$, $\ker S_r$ è strettamente più grande di $\Lambda^r(V)$. Infatti $\ker S_r$ contiene elementi del tipo $v \wedge w \otimes u \otimes \dots \otimes u$ che non stanno in $\Lambda^r(V)$. Similmente $\ker A_r$ è strettamente più grande di $S^r(V)$. Per $r = 2$ invece $\ker S_2 = \Lambda^2(V)$ (per il Lemma 4.5) e dunque:

PROPOSIZIONE 4.9. *$T^2(V) = \Lambda^2(V) \oplus S^2(V)$.*

Pertanto, tenuto conto che le 2-forme corrispondono a forme bilineari alternanti su V^* e i 2-tensori simmetrici corrispondono a forme bilineari simmetriche su V^*, si ha che *ogni forma bilineare su V^* si può scrivere in modo unico come somma diretta di una forma bilineare alternante e di una forma bilineare simmetrica* (ma lo stesso non vale per forme r-multilineari su V^* con $r \ge 3$).

Ricordiamo che un polinomio omogeneo di grado k su V è una funzione $p : V \to \mathbb{K}$ tale che per ogni $v_1, \dots, v_k \in V$ fissati, per $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, la funzione $\mathbb{R}^k \ni (t_1, \dots, t_k) \mapsto p(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k)$ è un polinomio, e che $p(\lambda v) = \lambda^k p(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. L'insieme dei polinomi omogenei di grado k su V (compreso il polinomio identicamente nullo che è omogeneo di ogni grado) si indica con $P_k(V)$ ed è in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Definiamo

$$P(V) := \bigoplus_{k \ge 0} P_k(V).$$

Allora $P(V)$ ammette una naturale struttura di anello associativo commutativo tramite

$$(p \cdot q)(v) := p(v)q(v) \quad v \in V, p, q \in P(V).$$

TEOREMA 4.10. *$S(V^*)$ è isomorfo come anello a $P(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $\Phi : T(V^*) \to P(V)$ nel modo seguente. Dato $w \in T^r(V^*)$, ricordiamo che w può essere visto come una forma r-multilineare su $(V^*)^* = V$. Dunque possiamo definire $\Phi(w) \in P(V)$ tramite

$$\Phi(w)(v) := w(v, \dots, v).$$

Poiché w è r-multilineare, è chiaro che $\Phi(w) \in P_r(V)$ e si verifica facilmente che Φ è un morfismo di anelli. Asseriamo che $\Phi(S(w)) = \Phi(w)$ (il che prova che $\ker S \subseteq \ker \Phi$). Infatti, sugli elementi semplici si ha

$$\Phi(S_r(w_1^* \otimes \ldots \otimes w_r^*))(v) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} w_{\sigma(1)}^* \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(r)}^*(v, \ldots, v)$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} w_{\sigma(1)}^*(v) \ldots w_{\sigma(r)}^*(v) = w_1^*(v) \ldots w_r^*(v) = \Phi(w_1^* \otimes \ldots \otimes w_r^*)(v).$$

D'altra parte, se $p \in P_r(V)$, fissati $v_1, \ldots, v_r \in V$, espandiamo rispetto a $t_1, \ldots, t_r$ l'espressione $p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r)$. Poiché p è omogeneo di grado r si ottiene:

$$p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) = \sum_{j_1 + \ldots + j_r = r} T_{j_1 \ldots j_r}(v_1, \ldots, v_r) t_1^{j_1} \ldots t_r^{j_r}$$

Poniamo allora

$$\Psi(p)(v_1, \ldots, v_r) := \frac{1}{r!} T_{1 \ldots 1}(v_1, \ldots, v_r). \tag{4.1}$$

Verifichiamo che $\Psi(p)$ è r-multilineare. Per farlo, fissiamo una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V. Allora possiamo scrivere

$$p(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

essendo $a_{i_1 \ldots i_n} \in \mathbb{K}$. Si ha pertanto $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ per opportuni $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Dunque

$$t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{ij} \right) e_i,$$

da cui si ha

$$p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) = p\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{ij} \right) e_i \right)$$

$$= \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1 \ldots i_n} \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{1j} \right)^{i_1} \ldots \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{nj} \right)^{i_n}.$$

Da qui segue facilmente che per ogni fissato $j = 1, \ldots, r$, il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ è lineare in α_{ij} per $i = 1, \ldots, n$. Questo significa esattamente che $\Psi(p)$ è r-multilineare.

Verifichiamo adesso che, se $p \in P_k(V)$ allora $\Phi(\Psi(p)) = p$. Infatti, dato $v \in V$ si ha $\Phi(\Psi(p))(v) = \Psi(p)(v, \ldots, v)$. Per definizione $r!\Psi(p)(v, \ldots, v)$ è il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ nella espansione di $p(t_1 v + \ldots + t_r v)$. Per l'omogeneità si ha:

$$p(t_1 v + \ldots + t_r v) = p((t_1 + \ldots + t_r)v) = (t_1 + \ldots + t_r)^r p(v),$$

da cui segue subito che il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ è $r!p(v)$ e pertanto $\Phi(\Psi(p))(v) = p(v)$.

Questo prova che Φ è suriettiva ed è pertanto un isomorfismo da $T(V)/\ker\Phi \to P(V)$, la cui inversa è data da Ψ.

Per concludere la dimostrazione, visto che sappiamo già che $\ker S \subseteq \ker \Phi$, occorre e basta provare che $\ker \Phi \subseteq \ker S$.

A tal fine, verifichiamo che si ha $\Psi(\Phi(w)) = w$ se $w \in S^r(V^*)$. Utilizzando la multilinearità di w si ha

$$\begin{aligned}\Phi(w)(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) &= w(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r, \ldots, t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r)\\ &= \sum_{i_1 + \ldots + i_r = r} t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r} w(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}).\end{aligned}$$

Da cui, il termine $T_{1\ldots1}(v_1, \ldots, v_r)$, per la simmetria di w, è dato da

$$T_{1\ldots1}(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} w(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = r! w(v_1, \ldots, v_r).$$

Pertanto $\Psi(\Phi(w)) = w$ se $w \in S^r(V^*)$. $\square$

La formula (4.1) si dice *formula di polarizzazione*.