UNA INTRODUZIONE AGLI OPERATORI DI COMPOSIZIONE.

FILIPPO BRACCI E ROBERTO TAURASO
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"
Via della Ricerca Scientifica
00133 ROMA
E-mail: fbracci@mat.uniroma2.it, tauraso@mat.uniroma2.it

1. Dinamica nel disco unitario

Indichiamo con $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unità. In questa sezione studieremo la "dinamica" di una funzione olomorfa dal disco Δ a valori in Δ. Grazie al noto Teorema della Mappa di Riemann, tale situazione è piuttosto generica. Indicheremo con $\mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$l'insieme delle funzioni olomorfe dal disco Δ in sé. Iniziamo dal seguente risultato, di fondamentale importanza nella teoria geometrica delle funzioni

Lemma 1.1 (Lemma di Schwarz)**.** *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ tale che $f(0) = 0$. Allora $|f(z)| \leq |z|$, con uguaglianza in un punto diverso da 0 (e pertanto in tutti i punti) se e solo se $f(z) = \lambda z$ per qualche $|\lambda| = 1$. Inoltre $|f'(0)| \leq 1$, con uguaglianza se e solo se $f(z) = \lambda z$ per qualche $|\lambda| = 1$.*

Dim. Dato che $f(0) = 0$ la funzione $g(z) := f(z)/z$ definita su $\Delta - \{0\}$ si estende ad una funzione olomorfa tale che $g(0) = f'(0)$. Sia $z \in \Delta - \{0\}$ e $0 < |z| < r < 1$. Per il principio del massimo risulta

$$|g(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)| = \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq 1/r. \tag{1.1}$$

Facendo tendere r a 1 si ottiene $|g(z)| \leq 1$, ovvero $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. Se $|f(z)| = |z|$ per qualche $z \in \Delta - \{0\}$ allora (sempre per la (1.1)) $|g|$ assume il massimo in un punto interno e dunque è una costante di modulo 1. Similmente se $|f'(0)| = 1$ allora g ha massimo in 0 e dunque è una costante di modulo 1. $\square$

Una prima conseguenza del Lemma di Schwarz è la classificazione del gruppo degli automorfismi del disco. Indichiamo con $\mathrm{Aut}(\Delta)$ il gruppo dei diffeomorfismi olomorfi con inversa olomorfa del disco in sé.

Proposizione 1.2. *Sia $\gamma \in Aut(\Delta)$. Allora esistono $\theta \in \mathbb{R}$ e $a \in \Delta$ tali che*

$$\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}. \tag{1.2}$$

In particolare γ si estende olomorficamente in un intorno di Δ. Inoltre $Aut(\Delta)$ agisce transitivamente su Δ—i.e. *dati due punti $z, w \in \Delta$ esiste $\gamma \in \Delta$ tale che $\gamma(z) = w$—e doppiamente transitivamente su $\partial\Delta$*—i.e. *dati $x, y \in \partial\Delta$ e $x', y' \in \partial\Delta$ con $x \neq y$ e $x' \neq y'$, esiste $\gamma \in Aut(\Delta)$ tale che $\gamma(x) = x'$ e $\gamma(y) = y'$.*

Dim. Sia $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Sia $a = \gamma(0) \in \Delta$. Consideriamo la funzione

$$\Phi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Un semplice calcolo mostra che $|\Phi_a(z)| < 1$ per ogni $z \in \Delta$ e che Φ_a è olomorfa in Δ. Inoltre $\Phi_a \circ \Phi_a = Id$ e dunque $\Phi_a \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Dato che $\Phi_a(a) = 0$, l'automorfismo $g := \Phi_a \circ \gamma$ è tale che $g(0) = 0$. Per il Lemma di Schwarz $|g(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \Delta$. Ma g^{-1} è esso stesso una funzione olomorfa del disco in sé che fissa 0, e dunque $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \Delta$. Questo implica che $|g(z)| = |z|$ e ancora per il Lemma di Schwarz $g(z) = e^{i\theta} z$ per un certo $\theta \in \mathbb{R}$, da cui segue parte dell'enunciato. Una volta avuta la formula (1.2) tutte le altre asserzioni seguono con facilità, tranne quella sulla doppia transitività sul bordo. È chiaro che basta provare che per ogni $x, y \in \partial\Delta$, $x \neq y$, esiste $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $\gamma(1) = x$ e $\gamma(-1) = y$. Inoltre, a meno di comporre con una rotazione si può supporre che $x = 1$, ovvero cerchiamo γ tale che $\gamma(1) = 1$ e $\gamma(-1) = y$. Sia $\sigma \in \partial\Delta$ la radice quadrata di $-y$ con parte reale positiva. Poniamo $a := (\sigma - 1)(\sigma + 1)$ e $\alpha := (\sigma + 1)(\overline{\sigma} + 1)$. Allora un semplice calcolo mostra che $|a| < 1$ e $\gamma(z) = \alpha(z - a)/(1 - \overline{a}z)$ è l'automorfismo cercato. □

Esercizio 1.3. Provare che se $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ allora γ ha al più un unico punto fisso in Δ (in tal caso γ è detto *ellittico*). Provare che γ non ha punti fissi in Δ se e solo se γ ha almeno un punto fisso su $\partial\Delta$. In questo ultimo caso provare che γ ha al più due punti fissi su $\partial\Delta$ (se γ ha un unico punto fisso su $\partial\Delta$ si dice *parabolico*, se ha due punti fissi distinti su $\partial\Delta$ si dice *iperbolico*).

Definizione 1.4. La *metrica iperbolica* (o *di Poincaré*) ds^2 su Δ è definita da:

$$ds^2 := \frac{dz \otimes d\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Vale a dire che se $v, w \in T_z\Delta = \mathbb{C}$ per $z \in \Delta$, allora $ds^2(v, w) = v\overline{w}/(1 - |z|^2)$. Ovvero ds^2 è una metrica hermitiana sulle fibre del fibrato tangente complesso, la cui parte reale è una metrica Riemanniana sulla soggiacente struttura reale, di curvatura costante -4.

Nota 1.5. Sia X una varietà connessa (reale o complessa) e dk una metrica lungo le fibre del fibrato tangente TX (cioè dk_x^2 è un prodotto scalare o hermitiano definito positivo su T_xX, che varia in modo liscio al variare del punto x), poniamo $dk(v, v) := \sqrt{dk^2(v, v)}$. Data $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva C^1 a tratti, definiamo

$$L(\gamma) := \int_0^1 dk(\gamma'(t), \gamma'(t))dt.$$

Il numero $L(\gamma)$ si dice la *lunghezza di* γ rispetto a dk. Dati $x, y \in X$ sia $\Gamma(x, y)$ l'insieme delle curve $\gamma : [0, 1] \to X$ che sono C^1 a tratti e tali che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Si definisce

$$k(x, y) := \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} L(\gamma).$$

Si verifica che $k(x, y)$ è una distanza su X. La distanza k si dice *la distanza integrata* di dk.

Definizione 1.6. La distanza integrata di ds su Δ si indica con $\omega : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}$ e si dice la *distanza iperbolica* (o *di Poincaré*) di Δ.

Andiamo ad esaminare in dettaglio la distanza di Poincaré su Δ. Per prima cosa cerchiamo le isometrie per la metrica Riemanniana data dalla parte reale di ds. Indichiamo con $<, >:= \mathsf{Re}\, ds^2(,)$. Questo equivale a "identificare" $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. Ovvero, dato $v \in T_z\Delta = \mathbb{C}$ si scrive $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ se $v = v_1 + iv_2$. La moltiplicazione per i su $\mathbb{C}$ si legge su $\mathbb{R}^2$ come l'azione dell'endomorfismo J che agisce tramite $J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$. Dunque

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle_z = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{(1-|z|^2)^2},$$

e J è una isometria per $\langle , \rangle$. Sia $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Dalla (1.2) segue che $df_z = e^{i\theta} \frac{|a|^2-1}{(1-\overline{a}z)^2} dz$. Poiché $1 - |f(z)|^2 = -(1-|a|^2)(1-|z|^2)/|1-\overline{a}z|^2$ si ha

$$\mathsf{Re}\, ds^2_{f(z)}(df_z v, df_z w) = \frac{1}{(1-|f(z)|^2)^2} \frac{(|a|^2-1)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \mathsf{Re}\, \langle v, w \rangle = \mathsf{Re}\, ds^2_z \langle v, w \rangle,$$

che prova che $\mathrm{Aut}(\Delta)$ sono isometrie per $\mathsf{Re}\, ds^2$.

Sia ora $f : \Delta \to \Delta$ una funzione C^1 che sia una isometria per $\langle , \rangle$. Sia $x \in \Delta$ e sia $T \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $T(f(x)) = x$. Allora per ogni v, w si ha

$$\langle d(T \circ f)_x v, d(T \circ f)_x w \rangle_x = \langle v, w \rangle_x,$$

ovvero $d(T \circ f)_x$ è ortogonale, cioè $d(T \circ f)_x = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Dunque $d(T \circ f)_x \circ J = \pm J \circ d(T \circ f)_x$ e poiché $dT \circ J = J \circ dT$, ne segue che $df_x \circ J = \pm J \circ df_x$. Poiché df_x è invertibile, per continuità si ha $df \circ J = \pm J \circ df$. Ricordando che J è la "moltiplicazione per i", questo significa che df è $\mathbb{C}$-lineare o $\mathbb{C}$- antilineare, ovvero f è olomorfa o antiolomorfa. Dato che f è invertibile, risulta che f è un automorfismo olomorfo o antiolomorfo di Δ. Ciò prova

Proposizione 1.7. *Il gruppo Aut(Δ) è formato da isometrie per la metrica iperbolica di Δ. Ogni altra isometria è data da un automorfismo antiolomorfo di Δ.*

Esercizio 1.8. Provare la proposizione precedente con un calcolo esplicito di $f^* ds^2 = ds^2$ e utilizzando le equazioni di Cauchy- Riemman.

La Proposizione 1.7 implica che se $\gamma : [0,1] \to \Delta$ è una curva C^1 a tratti, e indichiamo con L la lunghezza rispetto a ds, allora $L(\gamma) = L(\Phi \circ \gamma)$ per ogni $\Phi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Pertanto $\omega(\Phi(z), \Phi(w)) = \omega(z, w)$ per ogni $z, w \in \Delta$ e $\Phi \in \Delta$. Dunque

$$\omega(z, w) = \omega(0, \Phi_z(w))$$

dove $\Phi_a(z) := (a - z)/(1 - \overline{a}z)$ è un automorfismo che manda a in 0. Ci siamo allora ricondotti a studiare $\omega(0, z)$ per $z \in \Delta$. Dato che le rotazioni sono isometrie, si può trovare una rotazione ρ_z tale che $\rho_z(z) = |z|$ e quindi $\omega(0, z) = \omega(0, |z|)$. Sia ora $\gamma : [0,1] \to \Delta$ una geodetica per ds tale che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = |z|$. Dato che il coniugio e le rotazioni sono isometrie, risulta che la riflessione rispetto ad ogni raggio uscente da 0 è una isometria. Pertanto la riflessione di γ rispetto al raggio uscente da 0 e con direzione $\gamma'(0)$ è ancora una geodetica con stesso vettore tangente in 0. Per l'unicità delle geodetiche risulta che γ è radiale. Dunque si può integrare lungo la geodetica $\gamma : [0, |z|] \to \Delta$ definita da $\gamma(t) = t$:

$$\omega(0, |z|) = \int_0^{|z|} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

L'espressione

$$\omega(0, z) = 1/2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{1.3}$$

è l'espressione cercata. Notare che ω è una distanza completa, ovvero che dato $z \in \Delta$, $\omega(z,w) < \infty$ se e solo se $w \in \Delta$, e in particolare z ha distanza infinita dal bordo.

Vediamo adesso l'azione di una funzione olomorfa su ds^2 e ω. Ricordiamo che se X, Y sono due varietà e sia dk^2 una metrica Riemanniana (o Hermitiana) su Y, una funzione $f : X \to Y$ agisce su dk^2 tramite *pull-back*, ovvero si può definire una (pseudo)metrica $f^*(dk^2)$ su X tramite $f^*(dk^2)_a(v,w) := dk^2_{f(a)}(df_a(v), df_a(w))$, dove $a \in X$ e $v, w \in T_aX$. Se X è dotato di una metrica dh, scriveremo $f^*(dk) \leq dh$ se $f^*(dh)_a(v,v) \leq dk_a(v,v)$ per ogni $a \in X$ e $v \in T_aX$. Con questa notazione andiamo ad enunciare un risultato fondamentale:

Teorema 1.9 (Schwarz-Pick). *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$. Allora:*

1. *$f^*(ds) \leq ds$. Vale l'uguale se e solo se f è un automorfismo di Δ.*
2. *Per ogni $z, w \in \Delta$ risulta $\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z,w)$. Vale l'uguale per una coppia (z,w), $z \neq w$, se e solo se f è un automorfismo di Δ.*

Dim. 1) Notiamo che ds_0 è l'usuale metrica hermitiana su $\mathbb{C}$. Pertanto se $f(0) = 0$ dal Lemma di Schwarz risulta $|f'(0)| \leq 1$ e dunque $f^*(ds_0) \leq ds_0$, con uguale se e solo se $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Sia $f(a) = b$, con $a, b \in \Delta$. Dato che $\mathrm{Aut}(\Delta)$ agisce in modo transitivo su Δ, esistono $\Phi_a, \Phi_b \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tali che $\Phi_a(0) = a$ e $\Phi_b(b) = 0$. Consideriamo la funzione olomorfa $g := \Phi_b \circ f \circ \Phi_a$. Per costruzione $g(0) = 0$. Per quanto sopra detto è $g^*(ds_0) \leq ds_0$. Ora

$$g^*(ds_0) = \Phi_a^* \circ f^* \circ \Phi_b^*(ds_0),$$

ed essendo $\Phi_b^*(ds_0) = ds_b$, $\Phi_a^*(ds_a) = ds_0$, risulta

$$ds_a = (\Phi_a^{-1})^*(ds_0) \geq (\Phi_a^{-1})^*(g^*(ds_0)) = f^*(ds_b).$$

Inoltre se c'è uguaglianza segue dal Lemma di Schwarz che g—e dunque f—è un automorfismo. 2) Il ragionamento è simile al precedente. Se $f(0) = 0$ allora per il Lemma di Schwarz è $|f(z)| \leq |z|$. Inoltre $r \mapsto \log \frac{1+r}{1-r}$ è crescente in $r \in (0,1)$, dunque

$$\omega(f(0), f(z)) = \omega(0, f(z)) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |f(z)|}{1 - |f(z)|} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = \omega(0, z),$$

con uguaglianza se e solo se f è un automorfismo. In generale siano $z, w \in \Delta$. Siano $\Phi_w, \Phi_{f(w)} \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ due automorfismi tali che $\Phi_w(0) = w$ e $\Phi_{f(w)}(f(w)) = 0$. Allora la funzione olomorfa $g := \Phi_{f(w)} \circ f \circ \Phi_w$ è tale che $g(0) = 0$. Dunque per ogni $\zeta \in \Delta$ è $\omega(g(\zeta), g(0)) \leq \omega(\zeta, 0)$, con uguaglianza se e solo se g è un automorfismo. Poniamo $\zeta := \Phi_w^{-1}(z)$. Allora, ricordando che Φ_w e $\Phi_{f(w)}$ sono isometrie,

$$\omega(w, z) = \omega(\Phi_w^{-1}(w), \Phi_w^{-1}(z)) = \omega(0, \Phi_w^{-1}(z))$$
$$\geq \omega(g(0), g(\Phi_w^{-1}(z))) = \omega(f(\Phi_w(0)), f(\Phi_w(\Phi_w^{-1}(z)))) = \omega(f(w), f(z)),$$

come volevasi. □

Una conseguenza del Teorema 1.9 che ci servirà per studiare la dinamica è il seguente

Corollario 1.10. *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$, $f \notin Aut(\Delta)$. Sia $K \subset\subset \Delta$ un compatto in Δ. Allora esiste una costante C tale che $0 < C < 1$ e $\omega(f(z), f(w)) \leq C\omega(z,w)$ per ogni $z, w \in K$.*

Dim. Per il Teorema 1.9 risulta

$$C := \sup_{z,w\in K} \frac{\omega(f(z), f(w))}{\omega(z,w)} \leq 1.$$

Se $C = 1$ allora esistono $z, w \in K$, $z \neq w$ tali che $\omega(f(z), f(w)) = \omega(z, w)$, che significa $f \in \text{Aut}(\Delta)$, contro le nostre ipotesi. □

Un'altra fondamentale conseguenza del Teorema 1.9 è nel seguente esercizio:

Esercizio 1.11. Sia $f \in \text{Hol}(\Delta, \Delta)$. Provare che se f ha più di un punto fisso in Δ allora $f = Id$. Dare esempi di funzioni olomorfe dal disco in sé prive di punti fissi in Δ.

Veniamo adesso a studiare la dinamica di una funzione olomorfa dal disco in sé. Se $f \in \text{Hol}(\Delta, \Delta)$, indichiamo con $f^k := f^{k-1} \circ f$, dove $f^0 = Id$ e chiamiamo f^k la *k-sima iterata* di f.

Teorema 1.12. *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ e supponiamo che f non sia un automorfismo ellittico né l'identità. Se esiste $z_0 \in \Delta$ tale che $f(z_0) = z_0$ allora la successione delle iterate $\{f^k\}$ di f converge uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto z_0$,* i.e. *per ogni compatto $K \subset\subset \Delta$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costante $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $z \in K$ e $k > N$ è $|f^k(z) - z_0| < \epsilon$.*

Dim. Fissiamo un compatto $K \subset\subset \Delta$. Allora il Corollario 1.10 fornisce $0 < C < 1$ tale che $\omega(f(z_0), f(w)) \leq C\omega(z_0, w)$ per ogni $w \in K$. Per induzione risulta

$$\omega(z_0, f^k(w)) = \omega(f^k(z_0), f^k(w)) \leq C^k \omega(z_0, w) \leq C^k \max_{w\in K} \omega(z_0, w)$$

e dunque segue l'asserzione. □

Se $f \in \text{Aut}(\Delta)$ allora la dinamica di f è facilmente indagabile a partire dalla classificazione. In particolare se f è ellittico con punto fisso $z_0 \in \Delta$, esiste un automorfismo γ tale che $\gamma(z_0) = 0$ e dunque $\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$ è una rotazione. Per quanto riguarda gli automorfismi iperbolici e parabolici, la dinamica è descritta nel seguente esercizio:

Esercizio 1.13.
(1) Provare che se f è un automorfismo parabolico con (unico) punto fisso $x \in \partial\Delta$ allora la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto x$.
(2) Provare che se f è un automorfismo iperbolico con punti fissi $x, y \in \partial\Delta$ allora $f'(x) < 1$ e $f'(y) = 1/f'(x)$ e la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto x$. (*Sugg.:* Considerare un biolomorfismo Ψ tra Δ e $H := \{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w > 0\}$. Si può allora ridursi a dimostrare gli enunciati per l'automorfismo $g := \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}$. A meno di coniugio g ha la forma $w \mapsto w + i\lambda$, con $\lambda > 0$ nel caso parabolico e $w \mapsto \lambda w$ con $\lambda > 0$ nel caso iperbolico. Da cui segue il risultato.)

Resta allora da studiare il caso in cui $f \in \text{Hol}(\Delta, \Delta)$, $f \notin \text{Aut}(\Delta)$ e f non ha punti fissi in Δ. Nel caso in cui f ha un punto fisso interno l'idea base nel dimostrare che tale punto è un punto "attrattivo" è quella di utilizzare il fatto che la distanza di Poincaré è (strettamente) contratta da f, e quindi f contrae strettamente i dischi di Poincarè centrati nel punto. Vedremo che nel caso in cui f non ha punti fissi interni esiste un (unico) punto sul bordo tale che i dischi contenuti in Δ e tangenti a $\partial\Delta$ in tale punto sono mandati (strettamente) in sé dalla f. Prima di questo ci occorrono però alcune definizioni.

Definizione 1.14. Un *orodisco* $E(x,R)$ di raggio $R>0$ e centro $x \in \partial\Delta$ è l'insieme

$$E(x,R) := \{z \in \Delta : \frac{|x-z|^2}{1-|x|^2} < R\}.$$

Un calcolo diretto mostra che l'orodisco $E(x,R)$ è un disco euclideo contenuto in Δ di raggio $R/(R+1)$ e tangente a $\partial\Delta$ in x.

Esercizio 1.15. (1) Sia $z \in \Delta$ e $x \in \partial\Delta$. Provare che esiste $R>0$ tale che $z \in \partial E(x,R)$. Dedurne che $\cup_{R>0} E(x,R) = \Delta$ e $\cap_{R>0} \overline{E(x,R)} = \{x\}$.
(2) Sia $x \in \partial\Delta$, $0 < R_1 < R_2$. Allora $E(x,R_1) \subset E(x,R_2)$.
(3) Siano $x, y \in \partial\Delta$ e $x \neq y$. Provare che esiste $R>0$ tale che $E(x,R) \cap E(y,R) = \emptyset$.

Esercizio 1.16. Provare che $E(x,R) = \{z \in \Delta : \lim_{w\to x}[\omega(z,w) - \omega(0,w)] < 1/2 \log R\}$. (*Sugg.:* Sia $\gamma_z \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $\gamma_z(z) = 0$. Allora

$$[\omega(z,w) - \omega(0,w)] = [\omega(0,\gamma_z(w)) - \omega(0,w)],$$

e si può utilizzare l'espressione (1.3)).

L'esercizio precedente ha come conseguenza che gli automorfismi di Δ mandano orocicli in orocicli, *i.e.* se $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ allora $\gamma(E(x,R)) = E(\gamma(x), cR)$, dove $c>0$ dipende da γ e da x. Il prossimo passo è il seguente teorema:

Teorema 1.17 (Julia)**.** *Sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, $x \in \partial\Delta$. Supponiamo che*

$$\liminf_{z\to x} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} = \alpha < \infty.$$

Allora esiste un unico $y \in \partial\Delta$ tale che per ogni $R>0$ è

$$f(E(x,R)) \subseteq E(y,\alpha R).$$

Inoltre se esiste $z \in \partial E(x,R) \cap \Delta$ tale che $f(z) \in \partial E(y,\alpha R)$ allora f è un automorfismo di Δ.

Dim. Sia $\{z_k\} \subset \Delta$ una successione tale che $\lim_{k\to\infty} \frac{1-|f(z_k)|}{1-|z_k|} = \alpha$. A meno di estrarre una sottosuccessione si può supporre che $f(z_k) \to y \in \overline{\Delta}$. Se $y \in \Delta$ allora $\alpha = \infty$ contro le ipotesi, dunque $y \in \partial\Delta$. Dalla (1.3)

$$\begin{aligned}\log\frac{1-|f(z_k)|}{1-|z_k|} &= \log\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|} - \log\frac{1+|f(z_k)|}{1-|f(z_k)|} + \log\frac{1+|f(z_k)|}{1+|z_k|}\\ &= 2[\omega(0,z_k) - \omega(0,f(z_k)) + O(1-|z_k|)].\end{aligned}$$

Pertanto dato che log è una funzione continua,

$$\frac{1}{2}\log\alpha = \frac{1}{2}\log\lim_{k\to\infty}\frac{1-|f(z_k)|}{1-|z_k|} = \lim_{k\to\infty}[\omega(0,z_k) - \omega(0,f(z_k))]. \tag{1.4}$$

Abbiamo visto che per $\tau \in \partial\Delta$, $r>0$ e $\zeta \in \Delta$ è $\zeta \in E(\tau,r)$ se e solo se $\lim_{w\to\tau}[\omega(\zeta,w) - \omega(0,w)] < 1/2 \log r$. Sia $z \in E(x,R)$. Per provare che $f(z) \in E(y,\alpha R)$ utilizziamo la precedente caratterizzazione con w uguale alla successione $\{f(z_k)\}$:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}[\omega(f(z),f(z_k)) - \omega(0,f(z_k)] &\le \lim_{k\to\infty}[\omega(z,z_k) - \omega(0,z_k) + \omega(0,z_k) - \omega(0,f(z_k))]\\ &\le \frac{1}{2}\log R + \frac{1}{2}\log\alpha.\end{aligned}$$

Notiamo che la prima disuguaglianza nelle espressioni precedenti deriva dal Teorema 1.9, e che dunque è una disuguaglianza stretta a meno che $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. La seconda disuguaglianza deriva dall'essere $z \in E(x, R)$. Pertanto se $z \in \partial E(x, R) \cap \Delta$ è $f(z) \in \partial\Delta$ se e solo se le precedenti disuguaglianze sono tutte uguaglianze e $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$. Resta solo da provare che y è unico. Supponiamo che esista $y' \in \partial\Delta$ tale che $f(E(x, R)) \subseteq E(y', \alpha R)$. Allora esiste $R > 0$ tale che $E(y, \alpha R) \cap E(y', \alpha R) = \emptyset$. Ma per ogni $z \in E(x, R)$ è $f(z) \in E(y, \alpha R) \cap E(y', \alpha R)$, assurdo. □

Definizione 1.18. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ e $x \in \partial\Delta$. Il numero

$$\alpha(x, f) := \liminf_{z \to x} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|}$$

si dice il *coefficiente di dilatazione* di f in x.

Nota 1.19. Dato che $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ è aperta, dal Teorema 1.17 segue che $\alpha(x, f) > 0$ per ogni $x \in \partial\Delta$.

Siamo pronti adesso a studiare la dinamica di una funzione olomorfa senza punti fissi in Δ.

Teorema 1.20 (Wolff). *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ senza punti fissi in Δ. Allora esiste un unico $x \in \partial\Delta$ tale che $f(E(x, R)) \subseteq E(x, R)$ per ogni $R > 0$. Inoltre se esiste $z \in \partial E(x, R)$ tale che $f(z) \in \partial E(x, R)$ allora f è un automorfismo parabolico di Δ.*

Dim. Per prima cosa proviamo che la successione delle iterate di 0, $\{f^k(0)\}$, non ha punti limite in Δ. Sia per assurdo $\lim_{m\to\infty} f^{k_m}(0) = x \in \Delta$ per qualche sottosuccessione k_m. Sia Y il compatto $\{f^{k_m}(0)\} \cup \{x\}$ e $K = Y \cup f(Y)$. Per il Corollario 1.10 esiste una costante C tale che $0 < C < 1$ e $\omega(f(z), f(w)) \leq C\omega(z, w)$ per ogni $z, w \in K$. Pertanto

$$\omega(f^{k_m+2}(0), f^{k_m+1}(0)) \leq C\omega(f^{k_m+1}(0), f^{k_m}(0)). \tag{1.5}$$

Applicando più volte il Teorema 1.9 si ottiene

$$C\omega(f^{k_m+1}(0), f^{k_m}(0)) \leq C\omega(f^{k_{m-1}+2}(0), f^{k_{m-1}+1}(0)).$$

Per induzione si ha allora

$$\omega(f^{k_m+2}(0), f^{k_m+1}(0)) \leq C^m\omega(0, f(0)).$$

Dunque

$$\omega(f^2(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} \omega(f^{k_m+2}(0), f^{k_m+1}(0)) \leq \lim_{m\to\infty} C^m\omega(0, f(0)) = 0,$$

e pertanto $f(f(x)) = f(x)$ contro l'ipotesi f senza punti fissi. Allora $\{f^k(0)\}$ può accumulare solo in punti del bordo. In particolare si può trovare una sottosuccessione $w_m := f^{k_m}(0)$ tale che

$$\omega(0, w_m) < \omega(0, f(w_m)),$$

per ogni m. Infatti dato che $f^k(0)$ accumula solo su $\partial\Delta$ e 0 ha distanza di Poincaré infinita da $\partial\Delta$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste certamente k_m che sia il più grande intero con la proprietà che $\omega(0, f^{k_m}(0)) \leq m$, e dunque

$$\omega(0, w_m) \leq m < \omega(0, f(w_m)).$$

A meno di estrarre un'altra sottosuccessione si può supporre che $w_m \to x \in \partial\Delta$. Utilizzando un ragionamento uguale a quello che ci ha portato alla formula (1.4) si trova

$$\frac{1}{2}\log\alpha(x,f) = \liminf_{m\to\infty}[\omega(0,w_m) - \omega(0,f(w_m))] \leq 0,$$

i.e, $\alpha(x,f) \leq 1$. Ora il Teorema 1.17 ci fornisce un unico punto $y \in \partial\Delta$ tale che $f(E(x,R)) \subseteq E(y,\alpha R) \subseteq E(y,R)$, e sempre tale teorema determina l'asserzione sulla uguaglianza. Resta da provare che $y = x$. Dalla dimostrazione del Teorema 1.17 abbiamo visto che y è l'unico limite della successione $\{f(w_m)\}$—qui supponiamo, come è lecito a meno di sottosuccessioni, che tutta la successione $\{w_m\}$ realizzi il $\liminf$ che definisce $\alpha(x,f)$. La successione di funzioni olomorfe $\{f^{k_m}\}$ è uniformemente limitata (dato che $|f^{k_m}(z)| \leq 1$ per ogni m e $z \in \Delta$). Per il Teorema di Montel esiste una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti di Δ ad una funzione olomorfa g. Per semplicità supponiamo che l'intera successione $\{f^{k_m}\}$ converga a g. Allora

$$g(0) = \lim_{m\to\infty} f^{k_m}(0) = x \in \partial\Delta.$$

Per il principio del massimo modulo, essendo $|g(z)| \leq 1$ per $z \in \Delta$, g è una funzione costante, ovvero $g(z) = x$ per ogni $z \in \Delta$. Dato che

$$y = \lim_{m\to\infty} f(w_m) = \lim_{m\to\infty} f(f^{k_m}(0)) = \lim_{m\to\infty} f^{k_m}(f(0)) = g(f(0)) = x,$$

si conclude la dimostrazione. □

Come corollario abbiamo il pezzo mancante nello studio della dinamica in Δ:

Teorema 1.21 (Wolff-Denjoy)**.** *Sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$ senza punti fissi in Δ. Allora esiste un unico punto $x \in \partial\Delta$ tale che la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto x$.*

Dim. Nella dimostrazione del teorema di Wolff abbiamo visto che $\{f^k(0)\}$ non può accumulare in Δ. Un ragionamento analogo mostra che per ogni $z \in \Delta$ la successione $\{f^k(z)\}$ non può accumulare in Δ. Pertanto per il principio del massimo (come nella parte finale della dimostrazione del Teorema 1.20) ogni sottosuccessione convergente di $\{f^k\}$ (ne esistono per il Teorema di Montel) deve convergere ad una funzione costante $z \mapsto y$ per qualche $y \in \partial\Delta$. Ma per il Teorema 1.20 esiste un unico punto $x \in \partial\Delta$ tale che $f(E(x,R)) \subseteq E(x,R)$ per ogni $R > 0$. Fissato $R > 0$ e $z \in E(x,R)$ risulta $f^k(z) \in E(x,R)$ per ogni k. Dato che $\partial E(x,R) \cap \partial\Delta = \{x\}$ segue che l'unico possibile punto di accumulazione per ogni sottosuccessione è x, e quindi che $\{f^k\}$ converge alla funzione $z \mapsto x$. □

Definizione 1.22. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$, $f \neq Id$. Se esiste $w \in \Delta$ tale che $f(w) = w$ allora w si dice il *punto di Wolff* di f. Se f non ha punti fissi in Δ si chiama *il punto di Wolff* di f il punto $x \in \partial\Delta$ determinato dal Teorema 1.20 (che coincide con il punto determinato dal Teorema 1.21).

Nei seguenti esercizi riportiamo alcune notevoli conseguenze della teoria svolta finora:

Esercizio 1.23.
(1) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$. Se $\alpha(x,f) > 1$ per ogni $x \in \partial\Delta$ allora $f \notin \mathrm{Aut}(\Delta)$ ed esiste un unico $z \in \Delta$ tale che $f(z) = z$.
(2) Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ e supponiamo che esista $z \in \Delta$ tale che $f(z) = z$. Se esiste $x \in \partial\Delta$ tale che $\alpha(x,f) \leq 1$ allora $f = Id$.

In particolare la dinamica di una funzione olomorfa dal disco in sé si può riassumere nel modo seguente:

Corollario 1.24. *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$. Supponiamo che f non sia un automorfismo ellittico di Δ né l'identità. Allora la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge al punto di Wolff di f.*

2. Derivate Angolari e il Teorema di Julia-Wolff- Carathéodory

In questa sezione daremo un nuovo senso al coefficiente di dilatazione al bordo e lo legheremo all'esistenza (in qualche modo) della derivata prima in un punto del bordo. Iniziamo con il definire in quale modo accettiamo di "fare i limiti".

Definizione 2.1. Un *settore* $S_\beta(x)$ di vertice $x \in \partial\Delta$ e ampiezza $\beta \in [0, \pi/2)$ è la regione di Δ contenuta tra due rette distinte uscenti da x e che formano ciascuna un angolo di β con il raggio $x - 0$, *i.e.*

$$S_\beta(x) := \{z \in \Delta : (\widehat{(x - z), x}) < \beta\}.$$

Diremo che una successione $\{z_k\} \subset \Delta$ converge a $x \in \partial\Delta$ *non-tangenzialmente* (*risp. tangenzialmente*) se $\lim_{k\to\infty} z_k = x$ e $\{z_k\}$ è (*risp.* non è) definitivamente contenuta in qualche (*risp.* nessun) settore $S_\beta(x)$. Se f è una funzione definita in Δ e $x \in \partial\Delta$, allora diremo che f ha *limite non-tangenziale* $L \in \mathbb{C}$ in $x \in \partial\Delta$ e scriveremo

$$\text{K-}\lim_{z\to x} f(z) = L$$

se, per ogni successione $\{z_k\}$ che converge in modo non-tangenziale a x, risulta $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = L$.

Esercizio 2.2.
(1) Dare esempi di successioni convergenti ad un punto $x \in \partial\Delta$ in modo non-tangenziale e tangenziale.
(2) Trovare una funzione $f \in \text{Hol}(\Delta, \Delta)$ tale che f ha *limite non-tangenziale* in 1 ma non è continua in 1. (*Sugg.:* Provare con i prodotti di Blaschke infiniti).

Alla luce delle precedenti definizioni, i risultati della precedente sezione ci permettono di trovare un semplice criterio per dire se una funzione olomorfa dal disco in sé ha limite non-tangenziale.

Corollario 2.3. *Sia $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ e sia $x \in \partial\Delta$. Se $\alpha(x, f) < +\infty$ allora esiste un unico punto $y \in \partial\Delta$ tale che K- $\lim_{z\to x} f(z) = y$. Il punto y è quello dato dal Teorema 1.17.*

Dim. Sia $\{z_k\}$ una successione definitivamente contenuta in ogni orociclo con centro x, *i.e.* tale che per ogni $R > 0$ esiste k_R tale che $z_k \in E(x, R)$ per $k > k_R$. Allora è chiaro che i punti di accumulazione di $\{z_k\}$ devono essere contenuti in $\cap_{R>0}\overline{E(x, R)} = \{x\}$. Dunque $\lim_{k\to\infty} z_k = x$. Il Teorema 1.17 ci dice che $\{f(z_k)\}$ è definitivamente contenuta in ogni orociclo di centro $y \in \partial\Delta$ (con y dato dal Teorema 1.17). Pertanto ragionando come in precedenza risulta $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = y$. Per concludere la dimostrazione basta notare che dato un settore $S_\beta(x)$ e $R > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$S_\beta(x) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < \delta\} \subset E(x, R).$$

Ovvero ogni successione che converge tangenzialmente a x è definitivamente contenuta in ogni orociclo. $\square$

Nota 2.4. Nella dimostrazione precedente abbiamo visto che nelle ipotesi del Corollario 2.3 f ha limite y per ogni successione che è definitivamente contenuta in ciascun orociclo (che sono ovviamente di più delle successioni che convergono non-tangenzialmente a x). Comunque storicamente (si veda il *Lemma di Abel* sulla convergenza di serie di potenze) la nozione di limite non-tangenziale è quella utilizzata.

Passiamo adesso a definire l'oggetto principale di questa sezione, *la derivata angolare*.

Definizione 2.5. Siano $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ e $x \in \partial\Delta$. Diremo che f ha *derivata angolare* in x se per qualche $y \in \partial\Delta$

$$\text{K-}\lim_{z \to x} \frac{y - f(z)}{x - z}$$

esiste finito. In tal caso chiamiamo tale limite la *derivata angolare* di f in x e la denotiamo con $f'(x)$.

Nota 2.6. Se f ha derivata angolare in x, allora è chiaro che f ha limite non-tangenziale in x. D'altra parte se f si estende C^1 in x, non è detto che f abbia derivata angolare in x, infatti condizione necessaria affinché f abbia derivata angolare in x è che f abbia limite non- tangenziale di *modulo* 1 in x (per esempio $z \mapsto z/2$ si estende C^1 su tutto $\partial\Delta$ ma non ha derivata angolare in nessun punto di $\partial\Delta$).

Come si può ben sospettare la derivata angolare è fortemente legata al coefficiente di dilatazione. Il legame è data dal seguente fondamentale teorema:

Teorema 2.7 (Julia- Wolff-Carathéodory)**.** *Siano $f \in Hol(\Delta, \Delta)$ e $x \in \partial\Delta$. Sono equivalenti:*

(1) $\alpha(x, f) < \infty$.
(2) *f ha derivata angolare in x.*
(3) *f ha limite non-tangenziale $y \in \partial\Delta$ in x e la sua derivata f' ha limite non-tangenziale finito in x.*

Inoltre:

(i) *In* (2) *f ha limite non-tangenziale $y \in \partial\Delta$ in x, dove y è il punto che compare in* (3).
(ii) *La derivata angolare di f in* (2) *è uguale al limite non tangenziale di f' in* (3), *e risulta $K\text{-}\lim_{z\to x} f'(z) = f'(x) = \alpha(x, f)\overline{x}y$.*

Dim. Dividiamo la dimostrazione in passi. (3)$\Rightarrow$(2) Per le ipotesi su f e dal Teorema Fondamentale del Calcolo risulta per $z \in \Delta$

$$y - f(z) = \int_\Gamma f'(w)dw,$$

dove Γ è un segmento di estremi z e x. In particolare prendiamo la parametrizzazione di Γ data da

$$\gamma : t \mapsto \frac{x - z}{1 - |z|}t + \frac{z - |z|x}{1 - |z|},$$

per $t \in [|z|, 1]$. Con questa parametrizzazione risulta

$$y - f(z) = \frac{x - z}{1 - |z|} \int_{|z|}^1 f'(\gamma(t))dt,$$

ovvero

$$\frac{y-f(z)}{x-z} = \frac{1}{1-|z|}\int_{|z|}^{1} f'(\gamma(t))dt.$$

Facendo tendere z a x dentro ad un settore $S_\beta(x)$ e tenendo presente che il termine a destra tende a $f'(1)$ poiché f' è continua in $S_\beta(x)$, risulta

$$\text{K-}\lim_{z\to x} \frac{y-f(z)}{x-z} = \text{K-}\lim_{z\to 1} f'(z).$$

Questo dimostra l'esistenza della derivata angolare, la sua uguaglianza con il limite non-tangenziale della derivata prima e il punto (i). (2)⇒(1) Supponiamo che f abbia derivata angolare in x. Per quanto detto nella Nota 2.6 f ha limite non-tangenziale $y \in \partial\Delta$ in x. Dunque

$$\alpha(x,f) = \liminf_{z\to x} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \le \liminf_{r\to 1^-} \frac{1-|f(rx)|}{1-r} \le \liminf_{r\to 1^-} \frac{|y-f(rx)|}{|x-rx|} < \infty. \tag{2.1}$$

(1)⇒(2) Questa è la parte più difficile del teorema. Il Corollario 2.3 fornisce $y \in \partial\Delta$ tale che f ha limite non-tangenziale y in x. A meno di rotazioni si può supporre che $x = y = 1$. Trasferiamo tutto sul semipiano destro $H := \{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w > 0\}$ tramite la *mappa di Cayley* C definita da

$$C(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

La mappa C è una trasformazione lineare fratta che ha come inversa $C^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$ e $C(\Delta) = H$. La mappa C manda 1 in ∞. Definiamo $F := C \circ f \circ C^{-1}$. Ora, se $C(z) = w$, si ha

$$1-|z|^2 = 1 - \frac{|w-1|^2}{|w+1|^2} = \frac{4\mathsf{Re}\, w}{|w+1|^2}, \tag{2.2}$$

e

$$1-z = 1-\frac{w-1}{w+1} = \frac{2}{1+w}. \tag{2.3}$$

Dunque dalla (2.3), essendo $C(f(z)) = F(w)$ per $w = C(z)$, è

$$\frac{1-f(z)}{1-z} = \frac{1+w}{1+F(w)}.$$

Facendo tendere z a 1, $w = C(z)$ tende a ∞, e dato che $f(z)$ tende a 1 (se z tende a 1 in modo non- tangenziale), risulta che $F(w)$ tende a ∞ per w che *tende a* ∞ *in modo non-tangenziale* (qui diciamo che una successione $\{w_k\}$ tende a ∞ in modo non- tangenziale se $\{C^{-1}(w_k)\}$ tende a 1 in modo non- tangenziale. Dato che C è conforme equivale a dire che $\{w_k\}$ è definitivamente contenuta in $S_\beta(\infty) := \{w \in H : |\arg w| < \beta\}$ per un certo $\beta \in (0, \pi/2)$). Pertanto risulta

$$\text{K-}\lim_{z\to 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \text{K-}\lim_{w\to\infty} \frac{w}{F(w)}. \tag{2.4}$$

La tesi sarà allora stata provata quando avremo dimostrato che

$$\text{K-}\lim_{w\to\infty} \frac{F(w)}{w} = \frac{1}{\alpha(x,f)}. \tag{2.5}$$

Se $w = C(z)$, utilizzando le (2.2) e (2.3), si trova

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} = \frac{\left|\frac{2}{1+w}\right|}{\frac{4\mathsf{Re}\, w}{|w+1|^2}} = \frac{1}{\mathsf{Re}\, w}.$$

Pertanto se definiamo per $M > 0$ gli *orocicli all'infinito*

$$H(\infty, M) := \{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w > M\},$$

risulta $z \in E(1, R)$ se e solo se $w = C(z) \in H(\infty, 1/R)$. Il Teorema 1.17 si traduce allora in $F(H(\infty, R)) \subseteq H(\infty, 1/(\alpha(x, f)R))$ per ogni $R > 0$, ovvero

$$\mathsf{Re}\, F(w) \geq \frac{1}{\alpha(x, f)} \mathsf{Re}\, w, \tag{2.6}$$

con uguaglianza se e solo se F—e quindi f—è un automorfismo. Evidentemente dalla (2.6) segue

$$c := inf_{w\in H} \frac{\mathsf{Re}\, F(w)}{\mathsf{Re}\, w} \geq \frac{1}{\alpha(x, f)}.$$

D'altra parte se proviamo che $\text{K-}\lim_{w\to\infty} \mathsf{Re}\, F(w)/w = c$ allora ragionando come in (2.1), dalla (2.4) si ottiene che $\alpha(x, f) \leq 1/c$, e quindi $c = 1/\alpha(x, f)$. Allora l'obiettivo diventa

$$\text{K-}\lim_{w\to\infty} \frac{F(w)}{w} = c. \tag{2.7}$$

Poniamo $\eta(w) := F(w) - cw$. Per la definizione di c risulta che $\mathsf{Re}\, \eta(w) \geq 0$ e

$$\inf_{w\in H} \frac{\mathsf{Re}\, \eta(w)}{\mathsf{Re}\, w} = 0. \tag{2.8}$$

Dato che $F(w) = cw + \eta(w)$, la (2.7) è equivalente a

$$\text{K-}\lim_{w\to\infty} \frac{\eta(w)}{w} = 0. \tag{2.9}$$

Fissiamo pertanto un settore $S_\beta(\infty)$ e $\epsilon > 0$. Vogliamo trovare $R = R(\epsilon) > 0$ tale che per ogni $w \in S_\beta(\infty)$ e $|w| > R$ è $|\eta(w)| < \epsilon|w|$. Per la (2.8) esiste $w_0 \in H$ tale che

$$\mathsf{Re}\, \eta(w_0) < \epsilon \mathsf{Re}\, w_0. \tag{2.10}$$

Sia $dh := (C^{-1})^*(ds)$ la metrica iperbolica del semipiano destro (talvolta detta la *metrica di Lobachevski*) indotta dal pull-back tramite C della metrica iperbolica di Δ, e sia ω_H la distanza indotta da dh su H. Il Teorema 1.9 "tradotto" in termini di ω_H dice che se $B(w, M)$, per $w \in H$ e $M > 0$, è un disco per la metrica iperbolica di H, allora

$$G(B(w, M)) \subseteq B(G(w), M), \tag{2.11}$$

per ogni $G \in \mathrm{Hol}(H, H)$, con uguaglianza se e solo se G è un automorfismo di H. Notare che $B(w, M)$ è effettivamente un disco euclideo contenente w poiché C è conforme e manda cerchi in cerchi. Per $p \in H$ sia

$$A_p(w) := (\mathsf{Re}\, p)w + i\mathsf{Im}\, p.$$

Un semplice calcolo mostra che A_p è un automorfismo di H che manda 1 in p. Se D è un disco euclideo in H, indichiamo con $\mathrm{diam}_E(D)$ il suo diametro euclideo. Se $w \in S_\beta(\infty)$ allora esistono $M > 0$ e $k > 0$ tali che per ogni $|w| > M$ vale

$$\mathsf{Re}\, w > k(\mathsf{Re}\, w_0)\mathrm{diam}_E(B(1, r)) \tag{2.12}$$

dove $r = \omega_H(w_0, w)$. Per provare la (2.12), sia $M > 0$ tale che se $w \in S_\beta(\infty)$ e $|w| > M$ allora $\mathsf{Re}\, w > 2\mathsf{Re}\, w_0$. Notiamo che $B(1, r)$ ha centro sull'asse reale (essendo $B(1, r) = C(B_\Delta(0, r))$ e C conforme) e quindi $\mathrm{diam}_E(B(1, r)) < T(r)$ dove $T(r) \in \mathbb{R}$ è il punto del bordo di $B(1, r)$ più lontano da 0. Dato che $A_{w_0}(B(1, r)) = B(w_0, r)$ e $A_{w_0}(w)$ è una dilatazione più una traslazione segue che il centro di $B(w_0, r)$ appartiene alla retta per w_0 parallela all'asse reale e che $(\mathsf{Re}\, w_0)T(r)$ è il valore massimo dell'ascissa di punti di $\overline{B(w_0, r)}$. Ora è facile verificare che esiste $t \in (\beta, \pi/2)$ tale che se $v \in S_\beta(\infty)$ e $\mathsf{Re}\, v > 2\mathsf{Re}\, w_0$ allora v è contenuto in un settore angolare del tipo $w_0 + S_t(\infty)$. Questo significa che w appartiene alla parte di bordo di $B(w_0, r)$ compresa tra le due rette che formano il bordo di $w_0 + S_t(\infty)$. Dunque esiste $k = k(t) > 0$ tale che $\mathsf{Re}\, w \geq k\mathsf{Re}\, w_0 T(r)$, da cui la (2.12). Sia allora $w \in S_\beta(\infty)$ e $|w| > M$. Per la (2.11)

$$|\eta(w) - \eta(w_0)| \leq \mathrm{diam}_E(B(\eta(w_0), r)) = \mathrm{diam}_E(A_{\eta(w_0)}(B(1, r)))$$

$$= \mathrm{diam}_E((\mathsf{Re}\, \eta(w_0))B(1, r) + i\mathsf{Im}\, \eta(w_0)).$$

Ora le traslazioni sono isometrie per la metrica euclidea e pertanto

$$\mathrm{diam}_E((\mathsf{Re}\, \eta(w_0))B(1, r) + i\mathsf{Im}\, \eta(w_0)) = \mathrm{diam}_E((\mathsf{Re}\, \eta(w_0))B(1, r)).$$

D'altra parte $\mathrm{diam}_E((\mathsf{Re}\, \eta(w_0))B(1, r)) = (\mathsf{Re}\, \eta(w_0))\mathrm{diam}_E(B(1, r))$ e per l'equazione (2.10) è

$$(\mathsf{Re}\, \eta(w_0))\mathrm{diam}_E(B(1, r)) \leq \epsilon\mathsf{Re}\, w_0 \mathrm{diam}_E(B(1, r)) \leq \epsilon k\mathsf{Re}\, w,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla (2.12). Mettendo insieme tutte queste catene di disuguaglianze si ottiene

$$|\eta(w) - \eta(w_0)| \leq \epsilon k\mathsf{Re}\, w \leq \epsilon k|w|.$$

Pertanto per ogni $w \in S_\beta(\infty)$ si ha

$$\frac{|\eta(w)|}{|w|} \leq \frac{|\eta(w_0)|}{|w|} + \epsilon k.$$

Ovvero

$$\limsup_{w\to\infty, w\in S_\beta(\infty)} \frac{|\eta(w)|}{|w|} \leq \epsilon k.$$

Essendo ϵ arbitrario si ha l'equazione (2.9) e si termina la dimostrazione. (2)⇒(3). Sappiamo che sotto le nostre ipotesi f ha limite non-tangenziale $y \in \partial\Delta$. A meno di rotazioni possiamo supporre che $x = y = 1$. Vogliamo allora dimostrare che $\text{K-}\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1)$, dove

$$f'(1) = \text{K-}\lim_{z\to 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}.$$

Pertanto $f(z) - 1 = f'(1)(z - 1) + h(z)$, dove

$$\text{K-}\lim_{z\to 1} \frac{h(z)}{1 - z} = 0.$$

Fissiamo un settore $S := S_\beta(1)$ e $z \in S$. Sia $t \in (\beta, \pi/2)$ e sia $\Gamma(z)$ un cerchio (euclideo) di centro z e tangente al bordo di $S_t(1)$ nel lato più vicino a z. Indichiamo con $r(z)$ il suo raggio. Dalla formula di Cauchy si ha

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)} \frac{f(\zeta)-1}{(\zeta-z)^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)} \frac{f'(1)(\zeta-1)+h(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$
$$= \frac{f'(1)}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)}\frac{d\zeta}{\zeta-z} + \frac{f'(1)(z-1)}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)}\frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$
$$= f'(1) + 0 + I(z).$$

Dobbiamo allora dimostrare che $\lim_{z\to 1, z\in S} I(z) = 0$. Sia $\epsilon > 0$. Se ζ è sufficientemente vicino a 1—il che accade se z lo è—allora $|h(\zeta)| < \epsilon|1-\zeta|$. Quindi

$$|I(z)| \le \frac{\epsilon}{2\pi i}\int_{\Gamma(z)}\frac{|1-\zeta|}{|\zeta-z|^2}|d\zeta|$$
$$\le \frac{\epsilon}{r(z)}\max_{\zeta\in\Gamma(z)}\{|1-\zeta|\}$$
$$= \frac{\epsilon}{r(z)}(r(z)+|1-z|) = \epsilon(1+\frac{|1-z|}{r(z)}).$$

Ora $r(z)/|1-z| \ge \sin(t-\beta)$, da cui $|I(z)| \le \epsilon k$ per una costante $k = k(t,\beta) > 0$. Essendo ϵ arbitrario, ne segue che $|I(z)| \to 0$ per $z \to 1$ e $z \in S$. □

Una importante conseguenza diretta è:

Teorema 2.8. *Sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, $x \in \partial\Delta$. Allora x è il punto di Wolff di f se e solo se vale una delle seguenti (e quindi tutte):*
1. *K-$\lim_{z\to x} f(z) = x$, K-$\lim_{z\to x} |f'(z)| \le 1$.*
2. *$\alpha(f,x) \le 1$, K-$\lim_{z\to x} f(z) = x$.*
3. *K-$\lim_{z\to x}\left|\frac{x-f(z)}{x-z}\right| \le 1$.*

3. Operatori di composizione

Sia $\varphi : \Delta \to \Delta$ olomorfa, e denotiamo con

$$\mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C}) := \{f : \Delta \to \mathbb{C} \text{ olomorfa}\}.$$

Lo spazio $\mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti risulta essere uno spazio di Frechét, in particolare è uno spazio metrico con la distanza definita nel modo seguente:

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n},$$

dove $\|f-g\|_n = \max_{z\in K_n}|f(z)-g(z)|$ per $\{K_n\}$ una esaustione di compatti di Δ, ad esempio $K_n = \{z \in \Delta : |z| < 1-1/n\}$.

Risulta ben definito un operatore $C_\varphi : \mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C}) \to \mathrm{Hol}(\Delta,\mathbb{C})$ determinato da

$$C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi.$$

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.1. *Sia $\varphi \in Hol(\Delta,\Delta)$. Allora*
1. *C_φ è un operatore lineare continuo su $Hol(\Delta,\mathbb{C})$.*
2. *L'operatore C_φ è iniettivo se e solo se φ non è costante.*
3. *L'operatore C_φ è suriettivo se e solo se φ è un automorfismo.*

Proof. 1) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. Allora

$$C_\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha f \circ \varphi + \beta g \circ \varphi = \alpha C_\varphi(f) + \beta C_\varphi(f).$$

Inoltre se $\{f_n\} \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ converge uniformemente sui compatti a $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$, allora dato che φ manda compatti in compatti risulta $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ e pertanto $C_\varphi(f_n) \to C_\varphi(f)$ nella topologia di $\mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ ed è quindi continuo.

2) Supponiamo che $\varphi(z) = c \in \Delta$ per ogni $z \in \Delta$. Allora $\mathrm{Im}C_\varphi = \mathbb{C}$ e quindi C_φ non è iniettivo. Viceversa se φ non è costante allora se $C_\varphi(f) = C_\varphi(g)$ per qualche $f, g \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ risulta $f \circ \varphi = g \circ \varphi$ e dato che φ è aperta risulta $f \equiv g$.

3) Se φ è un automorfismo risulta $C_{\varphi^{-1}} = (C_\varphi)^{-1}$ e dunque C_φ è invertibile e in particolare è suriettivo. Supponiamo adesso che C_φ sia suriettivo. Proviamo che φ è iniettivo. Se non lo fosse, allora esisterebbero $z_1, z_2 \in \Delta$ con $z_1 \neq z_2$ tali che $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Pertanto per ogni $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ sarebbe $C_\varphi(f)(z_1) = C_\varphi f(z_2)$ e in particolare $Id \notin \mathrm{Im}C_\varphi$, contro la suriettività di C_φ. Pertanto φ è iniettiva. Proviamo adesso che φ è suriettiva. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Sia $w \in \Delta - \varphi(\Delta)$. Poniamo $h(z) := \frac{1}{z-w}$. Allora $g(z) := h \circ \varphi(z)$ è tale che $g \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. Vogliamo provare che $g \notin \mathrm{Im}C_\varphi$ per trovare un assurdo. Supponiamo infatti che esista $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ tale che $C_\varphi(f) = g$. Dalla $h \circ \varphi = g$ risulta che $f \equiv h$ su $\varphi(\Delta)$. Dato che φ non è costante e dunque è aperta, risulta che $f \equiv g$ in $\Delta - \{w\}$. In particolare allora g è limitata in un intorno di w (poiché f lo è). Ma ciò contrasta con la definizione di g. □

Osserviamo che per la proposizione precedente C_φ è invertibile se e solo se $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

4. Spazi di Hardy $H^p(\Delta)$

Ci poniamo adesso il problema di trovare uno spazio di Banach $X \subset \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ tale che $C_\varphi : X \to X$, e di studiare le proprietà di C_φ su X. Per definire tale spazio introduciamo la nozione di *spazio di Hardy* e richiamiamo le principali proprietà.

Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. Per $0 < p < \infty$ e $r \in (0, 1)$ definiamo

$$M_{r,p}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \tag{4.1}$$

Per il principio del massimo $M_{r,p}(f)$ è non decrescente in r e dunque esiste il limite per $r \to 1^-$.

Definizione 4.1. Sia $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. Diciamo che f appartiene allo spazio di Hardy $H^p(\Delta)$, $f \in H^p(\Delta)$, se

$$M_p(f) := \lim_{r \to 1^-} M_{r,p}(f) < +\infty.$$

Se $f \in H^p(\Delta)$ poniamo $\|f\|_p := (M_p(f))^{1/p}$.

Diciamo che $f \in H^\infty(\Delta)$ se $\sup_{z\in\Delta} |f(z)| < \infty$. Se $f \in H^\infty(\Delta)$ poniamo $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\Delta} |f(z)|$.

Osserviamo che dalla $x^q < 1 + x^p$ che vale per $0 \le q \le p$ e $x > 0$ risulta che se $f \in H^p(\Delta)$ allora $f \in H^q(\Delta)$ per $q \le p$.

Proposizione 4.2. *Se $1 \le p \le \infty$ lo spazio $H^p(\Delta)$ è uno spazio di Banach con norma $\| \cdot \|_p$.*

Dim. Se $p = \infty$, la dimostrazione non presenta difficoltà e viene lasciata al lettore come esercizio. Se $1 \le p < \infty$, $\|f\|_p$ soddisfa la disuguaglianza triangolare (basta applicare la disuguaglianza di Minkowski a $M_{p,r}(f)$). Pertanto $H^p(\Delta)$ è uno spazio normato. Inoltre dalla formula di rappresentazione di Cauchy per funzioni olomorfe risulta, se $z \in \Delta_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ e $0 < r < R < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

da cui

$$|f(z)| \le \frac{R}{R-r} M_{1,R}(f) \le \frac{R}{R-r} M_{p,R}^{1/p}(f)$$

e pertanto

$$|f(z)| \le \frac{1}{R-r} \|f\|_p \tag{4.2}$$

per ogni $z \in \Delta_r$. Pertanto se $\{f_n\}$ è una successione convergente a f in $H^p(\Delta)$ segue che $f_n \to f$ uniformemente sui compatti. In particolare se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $H^p(\Delta)$ segue che $\{f_n\}$ è una successione uniformemente limitata sui compatti e pertanto per il teorema di Montel converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. Dato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$ per ogni $m > n$, risulta per ogni $r < 1$

$$M_{r,p}(f - f_n) = \lim_{m \to \infty} M_{r,p}(f_m - f_n) < \epsilon,$$

da cui $\|f - f_n\|_p < \epsilon$ e $f_n \to f$ in $H^p(\Delta)$. Dunque $H^p(\Delta)$ è completo ed è uno spazio di Banach. □

Nota 4.3. (1) La disuguaglianza (4.2) ha come conseguenza che il *funzionale di valutazione* $k_z : H^p(\Delta) \to \mathbb{C}$ definito da $f \mapsto f(z)$ è continuo. Infatti scelti $0 < r < R < 1$ tali che $|z| < r$ risulta

$$\|k_z\|_p = \sup_{\|f\|_p \le 1} |k_z(f)| \le \frac{1}{R-r} \|f\|_p \le \frac{1}{R-r}.$$

(2) Nella dimostrazione precedente abbiamo provato che se $f_n \to f$ in $H^p(\Delta)$ allora $f_n \to f$ uniformemente sui compatti. Il seguente esercizio mostra che il viceversa non è vero, ovvero che la topologia della convergenza uniforme sui compatti è più debole della topologia di $H^p(\Delta)$ per $p \ge 1$.

Esercizio 4.4. (1) Provare che la funzione $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ è tale che $f \in H^1(\Delta)$ ma $f \notin H^p(\Delta)$ per $p > 1$. Posto $f_n(z) := \frac{1+(1-1/n)z}{1-(1-1/n)z}$ si provi che $f_n \in H^p(\Delta)$ per ogni $p \ge 1$, che $f_n \to f$ uniformemente sui compatti e che $f_n \to f$ in $H^1(\Delta)$, ma che la successione $\{f_n\}$ non è convergente in $H^p(\Delta)$ per $p > 1$.

(2) Provare che $\{z^n\}$ converge uniformemente sui compatti a $z \mapsto 0$ ma che non converge in $H^p(\Delta)$.

Una delle caratteristiche principali di una funzione $f \in H^p(\Delta)$ è quella di essere rappresentabile come integrale di Poisson della sua traccia al bordo. Richiamiamo brevemente questi fatti, senza però entrare nel dettaglio delle dimostrazioni (per una trattazione sistematica si veda ad es. [**D**] o [**R**]).

Definizione 4.5. La funzione

$$P(\theta, z) := \mathsf{Re}\, \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z},$$

per $\theta \in \partial\Delta$ e $z \in \Delta$, si dice il *nucleo di Poisson* relativo a Δ.

Ricordiamo che se $g \in L^1(\partial\Delta)$ allora

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta) g(e^{i\theta}) d\theta, \tag{4.3}$$

è una funzione *armonica* in Δ, e K-$\lim_{z \to x} f(z) = g(x)$ per quasi ogni $x \in \partial\Delta$ (rispetto alla misura di Lebesgue di $\partial\Delta$), ovvero è la soluzione al problema di Dirichlet con dato al bordo assegnato (notiamo che se $g \in C^0(\partial\Delta)$ allora $f \in C^0(\overline{\Delta})$).

Diciamo che una funzione $u : \Delta \to \mathbb{C}$ è in $h^p(\Delta)$ se u è armonica in Δ e se vale una stima del tipo

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

In modo analogo a quanto visto per gli spazi $H^p(\Delta)$, si prova che $h^p(\Delta)$ è di Banach per $1 \le p \le \infty$.

Nota 4.6. Osserviamo che $f \in H^p(\Delta)$ se e solo se $\mathsf{Re}\, f \in h^p(\Delta)$ e $\mathsf{Im}\, f \in h^p(\Delta)$, $p > 0$. questo segue subito dalla disuguaglianza, valida per $a > 0, b > 0$, data da $a^p \le (a + b)^p \le 2^p(a^p + b^p)$.

Si può dimostrare che se $u \in h^p(\Delta)$ allora esiste una misura a variazione limitata μ su $\partial\Delta$ tale che

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) d\mu(\theta).$$

In particolare allora $u \in h^p(\Delta)$ ha limite non-tangenziale per quasi ogni $x \in \partial\Delta$. Vale la pena di osservare che se $p > 1$ allora tale limite è una funzione $u^*(\theta) \in L^p(\partial\Delta)$, la *traccia* di u su $\partial\Delta$, e di fatto u è la soluzione al problema di Dirichlet con dato al bordo u^*, ciò non è vero se $u \in h^1(\Delta)$. Tenuto conto della Nota 4.6 e della precedente discussione si ha (in parte)

Teorema 4.7. *Sia $f \in H^p(\Delta)$, $1 \le p \le \infty$. Allora per quasi ogni $x \in \partial\Delta$ la funzione f ha limite non-tangenziale, indicato con $f^*(x)$, ovvero K-$\lim_{z \to x} f(z) = f^*(x)$. Inoltre $f^* \in L^p(\partial\Delta)$, $\|f^*\|_p = \|f\|_p$ e*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta) f^*(e^{i\theta}) d\theta.$$

Da osservare che, contrariamente al caso di funzioni armoniche, il teorema di rappresentazione vale anche nel caso $p = 1$.

Un'altra conseguenza del teorema di rappresentazione è

Teorema 4.8. *Sia $u \in h^p(\Delta)$, rispett. $f \in H^p(\Delta)$, per qualche $p \ge 1$. Allora $u \equiv 0$, rispett. $f \equiv 0$, se e solo se $u^* = 0$, rispett. $f^* = 0$, su di un insieme $E \subset \partial\Delta$ di misura non nulla.*

Esercizio 4.9. Provare che $u(z) = \mathsf{Re}\, \frac{1+z}{1-z}$ appartiene a $h^1(\Delta)$ ma che non esiste $g \in L^1(\partial\Delta)$ tale che $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) g(e^{i\theta}) d\theta$.

Dunque se $f \in H^p(\Delta)$ allora la traccia $f^* \in L^p(\partial\Delta)$. Esistono esempi di funzioni olomorfe su Δ che hanno limite radiale nullo per quasi ogni $x \in \partial\Delta$, ma che non sono identicamente nulle in Δ. Naturalmente, per il Teorema 4.8 tali funzioni non appartengono a nessun spazio $H^p(\Delta)$. È comunque interessante domandarsi quali $g \in L^p(\partial\Delta)$ sono tali che il loro integrale di Poisson dato da (4.3) è in $H^p(\Delta)$. La risposta è nel seguente teorema di F. e M. Riesz:

Teorema 4.10 (F. e M. Riesz)**.** *Sia $g \in L^p(\partial\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$. Esiste $f \in H^p(\Delta)$ tale che $f^* = g$ se e solo se*

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = 0$$

per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

Nota 4.11. Il precedente teorema dice che g è la traccia di una funzione olomorfa se e solo se appartiene allo spazio generato in $L^p(\partial\Delta)$ dalle funzioni $e^{in\theta}$ (che sono la traccia di z^n su $\partial\Delta$). Ovvero se non ha componenti lungo $e^{-in\theta}$ per $n = 1, 2, \ldots$ (che sono la traccia delle funzioni antiolomorfe $\overline{z}^n$). In effetti, posto

$$a_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

risulta $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ in $L^1(\partial\Delta)$. E se $f(z)$ è la funzione armonica su Δ definita da (4.3), scambiando, come è lecito fare, la serie con l'integrale, risulta

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

che risulta olomorfa se e solo se $a_n = 0$ per $n < 0$.

Un problema interessante e non del tutto risolto è quello di caratterizzare i coefficienti di Taylor dello sviluppo di una $f \in H^p(\Delta)$. Iniziamo dal seguente:

Teorema 4.12. *Sia $f \in H^2(\Delta)$ e sia $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ la sua espansione in* 0*. Allora*

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Dim. Dato che $|z|^2 = z\overline{z}$, possiamo scrivere

$$M_{r,2}^2(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})}d\theta.$$

Ora dato che $e^{in\theta}$ per $n \in \mathbb{Z}$ formano una base ortogonale di $L^2(\Delta)$ risulta, potendo scambiare il segno di integrale con quello di serie per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue,

$$M_{r,2}^2(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n}, \tag{4.4}$$

Pertanto per ogni $N \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n} \leq \|f\|_2^2,$$

facendo tendere $r \to 1$ si trova che tutte le somme parziali della serie sono limitate da $\|f\|_2^2$ e dunque così è per la serie stessa e in particolare è convergente. D'altra parte dalla (4.4) si trova la disuguaglianza opposta per $r \to 1$. $\square$

Nota 4.13. Il motivo per cui la norma $H^2(\Delta)$ si può esprimere attraverso i coefficienti dello sviluppo di Taylor (mentre negli altri spazi $H^p(\Delta)$ questo non è possibile) risiede nel fatto che $H^2(\Delta)$ è in modo naturale uno *spazio di Hilbert* complesso mediante il prodotto hermitiano dato da

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta}) \overline{g^*(e^{i\theta})} d\theta. \tag{4.5}$$

Questo non è altro che il prodotto su $L^2(\partial\Delta)$ ristretto al sottospazio (chiuso) $H^2(\partial\Delta)$. In particolare allora i coefficienti di Taylor di f coincidono con i coefficienti di Fourier di f^*, e il Teorema 4.12 non è altro che il teorema di Parseval. Per gli altri spazi $H^p(\Delta)$ la difficoltà nel descrivere la norma in termini dei coefficienti dello sviluppo di Taylor consiste nella difficoltà di scrivere la norma in $L^p(\partial\Delta)$ tramite i coefficienti di Fourier.

A titolo di esempio riportiamo il seguente teorema, una cui dimostrazione si trova su **[D]**.

Teorema 4.14 (Hausdorff-Young). *Se $f \in H^p(\Delta)$, $1 \le p \le 2$, e $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ allora la successione $\{a_n\} \in l^q$ (dove $q = \infty$ se $p = 1$ o $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se $p \neq 1$) e*

$$\|\{a_n\}\|_q \le \|f\|_p.$$

Viceversa, se $\{a_n\} \in l^p$ è una qualsiasi successione di numeri complessi, $1 \le p \le 2$, allora $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ è in H^q (con p, q come prima) e

$$\|f\|_q \le \|\{a\}\|_p.$$

Abbiamo visto che è possibile pensare a $H^p(\Delta)$ come ad un sottospazio chiuso di $L^p(\partial\Delta)$ tramite la rappresentazione di Poisson. Ci si può allora domandare come siano fatti i duali di $H^p(\Delta)$. Come osservato nella Nota 4.13, dato che $H^2(\Delta)$ è uno spazio di Hilbert, coincide con il suo duale, ovvero

$$H^2(\Delta)' = H^2(\Delta),$$

con isomorfismo dato dal prodotto hermitiano (4.5). Per $H^p(\Delta)$ con $p \neq 2$ la situazione è più complicata. Per il teorema di rappresentazione di Riesz ogni funzionale lineare T su $L^p(\partial\Delta)$ $(1 \le p < \infty)$ ha un'unica rappresentazione del tipo

$$T(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta, \tag{4.6}$$

per $g \in L^q(\partial\Delta)$ e $1/p + 1/q = 1$ se $p \neq 1$, $q = \infty$ se $p = 1$. Inoltre $\|T\| = \|g\|_q$. D'altra parte, un risultato di analisi funzionale garantisce che se X è un sottospazio chiuso di uno spazio di Banach Y, allora X' è isomorfo a $Y'/X^\perp$, dove $X^\perp$ è lo spazio dei funzionali che si annullano su X. Dunque per determinare $H^p(\Delta)'$ occorre e basta trovare $H^p(\Delta)^\perp$. Sia $g \in L^q(\partial\Delta)$ tale che $g \in H^p(\Delta)^\perp$. In particolare

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0$$

per $n \in \mathbb{N}$ e pertanto per il Teorema di F. e M. Riesz risulta che g è la traccia di una funzione (che chiamiamo ancora g) in $H^q(\Delta)$. Inoltre dalla formula di Cauchy

$$g(0) = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{i0\theta}d\theta = 0,$$

Dunque $g \in H_0^q(\Delta) := \{h \in H^q(\Delta) : h(0) = 0\}$. Viceversa (ancora dalla formula di Cauchy) segue che se $g \in H_0^q(\Delta)$ allora $g \in H^p(\Delta)^\perp$. Pertanto

$$H^p(\Delta)' = L^q(\partial\Delta)/H_0^q(\Delta), 1 \leq p < \infty.$$

Esercizio 4.15. Provare che $L^q(\partial\Delta)/H_0^q(\Delta)$ è isomorfo a $L^q(\partial\Delta)/H^q(\Delta)$ tramite l'applicazione $[\zeta] \mapsto [e^{i\theta}\zeta]$.

Per l'esercizio precedente risulta

$$H^p(\Delta)' = L^q(\partial\Delta)/H^q(\Delta), 1 \leq p < \infty.$$

È inoltre possibile ottenere una rappresentazione canonica di un funzionale lineare limitato su $H^p(\Delta)$. Infatti se $T \in H^p(\Delta)'$ allora per il teorema di Hahn-Banach esiste una estensione (non unica) di T ad un funzionale di $L^p(\Delta)$ e pertanto per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste $g \in L^q(\partial\Delta)$ tale che T ha la forma (4.6). Questa rappresentazione non è unica, ed è chiaro che se $g_1 \in [g] \in L^q(\partial\Delta)/H_0^q(\Delta)$ allora anche g_1 rappresenta T. D'altra parte per un teorema di M. Riesz, se $q > 1$, possiamo scegliere $g \in L^q(\partial\Delta)$ tale che

$$\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

ovvero $g \in H^q(\Delta)$ [il teorema di Riesz in questione afferma che la *proiezione analitica* di $g \in L^q(\partial\Delta)$, ovvero la funzione che si ottiene da $g \in L^q(\partial\Delta)$ ponendo a zero i coefficienti di Fourier di indice negativo, è un elemento di $H^q(\Delta)$ se $1 < q < \infty$]. Pertanto se $1 < p < \infty$ esiste una unica $g \in H^q(\Delta)$ tale che $T(f)$ sia della forma

$$T(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta.$$

Da notare che comunque tale rappresentazione non dà luogo ad una isometria tra $H^p(\Delta)'$ e $H^q(\Delta)$.

5. Il teorema di subordinazione di Littlewood

In questa sezione proviamo che se $\varphi \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ allora $C_\varphi : H^p(\Delta) \to H^p(\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$, è continuo e diamo una stima della sua norma. Proviamo prima il seguente lemma:

Lemma 5.1. *Sia $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$. Se $\varphi(0) = 0$ allora C_φ è un operatore continuo da $H^p(\Delta)$ in $H^p(\Delta)$ per $1 \leq p < \infty$ e $\|C_\varphi\|_p \leq 1$.*

Dim. La funzione $z \mapsto |f(z)|^p$ è subarmonica in Δ. Fissiamo $r \in (0, 1)$ e sia $h : \Delta \to \mathbb{C}$ la soluzione del problema di Dirichlet su $\Delta_r := \{z \in \Delta : |z| < r\}$ con dato $h(re^{i\theta}) = |f(re^{i\theta})|^p$. In particolare h è armonica in Δ_r e

$$|f(z)|^p \leq h(z), \quad \text{per } z \in \Delta_r. \tag{5.1}$$

Dato che per il Lemma di Schwarz risulta $\varphi(\Delta_r) \subseteq \Delta_r$, allora

$$|f(\varphi(z))|^p \leq h(\varphi(z)), \quad \text{per } z \in \Delta_r. \tag{5.2}$$

Tenendo presente il teorema del valor medio per funzioni armoniche, che $h \circ \varphi$ è armonica e che $h(re^{i\theta}) = |f(re^{i\theta})|^p$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f \circ \varphi(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h \circ \varphi(re^{i\theta}) d\theta = h \circ \varphi(0) = h(0) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \|f\|_p^p,\end{aligned}$$

pertanto

$$\|f \circ \varphi\|_p \leq \|f\|_p$$

e dunque $C_\varphi(f) \in H^p(\Delta)$ e $\|C_\varphi\|_p \leq 1$. □

Esercizio 5.2. Provare che se $\varphi \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ e $\varphi(0) = 0$ allora $\|C_\varphi\|_p = 1$ (*Sugg.: utilizzare il Lemma 5.1 e provare che se* $f : z \mapsto 1$ allora $\|C_\varphi(f)\|_p = \|f\|_p = 1$.

Prima di passare al caso generale, risolviamo il problema degli operatori di composizione in $H^\infty(\Delta)$.

Proposizione 5.3. *Sia $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$. Allora $C_\varphi : H^\infty(\Delta) \to H^\infty(\Delta)$ è continuo e $\|C_\varphi\|_\infty = 1$*

Dim. Sia $f \in H^\infty(\Delta)$. Allora, dato che $\varphi(\Delta) \subseteq \Delta$ risulta

$$\|f \circ \varphi\|_\infty = \sup_{z \in \Delta} |f(\varphi(z))| = \sup_{z \in \varphi(\Delta)} |f(z)| \leq \sup_{z \in \Delta} |f(z)| = \|f\|_\infty,$$

pertanto $\|C_\varphi\|_\infty \leq 1$. D'altra parte se $f \equiv 1$ si ha $\|f\|_\infty = 1$ e $C_\varphi f = 1$ e dunque $\|C_\varphi\|_\infty = 1$ da cui $\|C_\varphi\|_\infty = 1$. □

Per arrivare al caso generale abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 5.4. *Sia $\Phi_a(z) := (a - z)/(1 - \bar{a}z)$, $a \in \Delta$. Allora C_{Φ_a} è un operatore continuo da $H^p(\Delta)$ in sé e*

$$\|C_{\Phi_a}\|_p \leq \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/p}$$

Proof. Supponiamo che $f \in H^p(\Delta)$ sia continua su $\overline{\Delta}$. Allora

$$\begin{aligned}\|f \circ \Phi_a\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f \circ \Phi_a(e^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p |\Phi_a'(e^{it})| dt \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e^{it}|^2} dt \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Pertanto la formula è dimostrata nel caso f sia continua fino al bordo. Sia ora $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in H^p(\Delta)$. Allora, posto $f_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$, risulta $f_N \in H^p(\Delta)$ e il lemma vale per tali f_N. Pertanto, poiché $f_N \circ \Phi_a \to f \circ \Phi_a$ uniformemente sui compatti, per un semplice processo di limite si ottiene la tesi anche per f. □

Veniamo adesso al teorema annunciato:

Teorema 5.5 (Teorema di Subordinazione di Littlewood)**.** *Sia $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$. Allora l'operatore lineare C_φ manda lo spazio $H^p(\Delta)$ in sé, è continuo e*

$$\|C_\varphi\|_p \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{1/p}$$

Proof. Sia $a = \varphi(0)$, e Φ_a come nel Lemma 5.4. Allora $\tilde{\varphi} := \Phi_a \circ \varphi$ è tale che

$$\|C_{\tilde{\varphi}}\|_p \leq 1 \tag{5.3}$$

per il Lemma 5.1. D'altra parte $\varphi = \Phi_a \circ \tilde{\varphi}$ e dunque

$$C_\varphi = C_{\tilde{\varphi}} \circ C_{\Phi_a}.$$

Pertanto dalla (5.3) e dal Lemma 5.4 si ottiene

$$\|C_\varphi\|_p \leq \|C_{\tilde{\varphi}}\|_p \|C_{\Phi_a}\|_p \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{1/p}$$

come si voleva. □

6. Proprietà di compattezza degli operatori di composizione sullo spazio di Hardy $H^2(\Delta)$

In questa sezione ci restringeremo a studiare le proprietà di compattezza degli operatori di composizione sullo spazio di Hardy $H^2(\Delta)$. La motivazione di tale scelta risiede nel fatto che per $H^\infty(\Delta)$ l'operatore C_φ è compatto se e solo se $\|\varphi\|_\infty < 1$ e per $p \neq 2$ l'operatore C_φ è compatto se e solo se lo è in $H^2(\Delta)$.

Abbiamo già notato che $H^2(\Delta)$ è uno spazio di Hilbert complesso con prodotto dato da

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\theta, \quad f, g \in H^2(\Delta).$$

Dunque vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$| < f, g > | \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Per $f \in H^2(\Delta)$ si ottiene una miglior stima della crescita del modulo rispetto a quella ottenuta in (4.2). Infatti vale

Proposizione 6.1. *Sia $f \in H^2(\Delta)$. Allora*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}}. \tag{6.1}$$

Dim. Dal Teorema 4.4 e dalla disuguaglianza di Holder risulta

$$|f(z)| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n| \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2)^{1/2} (\sum_{n\in\mathbb{N}} |z^n|^2)^{1/2} = \|f\|_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

da cui la tesi. □

Nota 6.2. Dato che, per la discussione nella Sezione 4, $H^2(\Delta)' = H^2(\Delta)$, sia ha che $H^2(\Delta)$ è riflessivo, ed è facile vedere che è separabile (dato che $\{z^n\}$ forma un sistema ortonormale completo). In particolare ciò implica che la topologia debole e la topologia debole* coincidono e dunque per il Teorema di Alaoglu un insieme limitato e chiuso in $H^2(\Delta)$ è compatto per la topologia debole e ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente nella topologia debole.

Nel seguito, se $\{f_n\}, f \in H^2(\Delta)$ scriveremo $f_n \xrightarrow{d} f$ per indicare che $\{f_n\}$ converge a f nella topologia debole, ovvero che per ogni funzionale lineare $g \in H^2(\Delta)'$ vale

$$< f_n, g > \to < f, g > .$$

Abbiamo allora una sorta di "viceversa" della Nota 4.3.1:

Proposizione 6.3. *Siano* $\{f_n\}, f \in H^2(\Delta)$. *Allora* $f_n \stackrel{d}{\to} f$ *se e solo se* $\{f_n\}$ *è limitata in* $H^2(\Delta)$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente sui compatti.*

Dim. Supponiamo che $\{f_n\}$ converga debolmente a f. Pertanto se $g \in H^2(\Delta)$ esiste $M_g > 0$ tale che

$$|< f_n, g >| \leq M_g < \infty,$$

per ogni n. Per il teorema di Banach-Steinhaus i funzionali lineari dati da

$$g \mapsto < g, f_n >$$

sono allora equilimitati, e pertanto esiste $M > 0$ tale che $\|f_n\|_2 < M$. Per la (6.1) risulta che $\{f_n\}$ è equilimitata sui compatti. Per il teorema di Montel esiste una sottosuccessione $\{f_{n_j}\}$ che converge uniformemente sui compatti a una funzione $g \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$. D'altra parte, poiché il *funzionale di valutazione* k_z è continuo su $H^2(\Delta)$ (si veda la Nota 4.3.1) e dato che $f_n \stackrel{d}{\to} f$ si ha

$$f_n(z) =< f_n, k_z >\to< f, k_z >= f(z),$$

e pertanto $f(z) = g(z)$. Dato che questo vale per ogni sottosuccessione, si ha che $f_n \to f$ uniformemente sui compatti.

Viceversa, se la successione $\{f_n\}$ è limitata in norma, per la Nota 6.2, si possono estrarre sottosuccessioni convergenti debolmente. Ragionando con il funzionale di valutazione come in precedenza, e tenuto conto che $f_n \to f$ uniformemente sui compatti, si ottiene che il limite di ogni sottosuccessione è proprio f e pertanto $f_n \stackrel{d}{\to} f$. □

Ricordiamo brevemente i seguenti fatti sugli operatori compatti:

Definizione 6.4. Sia X uno spazio di Banach. Un operatore lineare continuo $T : X \to X$ si dice *compatto* se manda limitati in relativamente compatti.

Per la linearità l'operatore T è compatto se e solo se, posto $B_X := \{x \in X : \|x\| < 1\}$, si ha che $T(B_x)$ è relativamente compatto in X.

In particolare tutti gli operatori lineari di spazi di dimensione finita sono compatti.

Proposizione 6.5. *Sia* H *uno spazio di Hilbert. Sia* $T : H \to H$ *un operatore lineare continuo. Allora* T *è compatto se e solo se data una qualsiasi successione* $\{x_n\}$ *convergente debolmente a* x*, la successione* $\{Tx_n\}$ *converge (in norma) a* Tx.

Dim. Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 6.3 e utilizzando il teorema di Banach-Steinhaus si vede che se $x_n \stackrel{d}{\to} x$ allora esiste $M > 0$ tale che $\|x_n\| < M$ per ogni n. In particolare $\{x_n\}$ è un insieme limitato e, se T è compatto, risulta $T(\{x_n\})$ relativamente compatto. Pertanto si possono estrarre delle sottosuccessioni convergenti in norma. Sia $Tx_{n_j} \to y$, allora $Tx_{n_j} \stackrel{d}{\to} y$. Dato che $x_n \stackrel{d}{\to} x$ implica che $Tx_n \stackrel{d}{\to} Tx$ risulta $y = Tx$. Applicando questo ragionamento a tutte le sottosuccessioni estratte si prova che $Tx_n \to Tx$.

Viceversa per la Nota 6.2 la "palla" $B_X := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ è relativamente compatta nella topologia debole. Pertanto $T(B_X)$ è relativamente compatto poiché per le ipotesi su T è relativamente compatto per successioni. Dunque T è compatto. □

Veniamo adesso ad esempi di operatori compatti (in particolare dati da operatori di composizione).

Definizione 6.6. Sia H uno spazio di Hilbert e $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo per H. Un operatore lineare continuo da H in sé si dice di *Hilbert-Schmidt* se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

Si può provare che la definizione non dipende dal sistema ortonormale scelto. Dato che un operatore di Hilbert-Schmidt può essere approssimato da *operatori di rango finito* (ovvero la cui immagine è uno spazio finito dimensionale), risulta

Proposizione 6.7. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore di Hilbert-Schmidt. allora T è compatto.*

Troviamo adesso un criterio affinché un operatore di composizione sia di Hilbert-Schmidt:

Proposizione 6.8. *Sia $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$. Allora C_φ è di Hilbert-Schmidt su $H^2(\Delta)$ se e solo se*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|} < \infty, \tag{6.2}$$

dove φ^* indica la traccia di φ su $\partial\Delta$.

Dim. In $H^2(\Delta)$ un sistema ortonormale completo è dato dai polinomi $\{z^n\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Ora, formalmente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi z^n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(\varphi^n)^*(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-|\varphi^*(e^{i\theta})|}$$

D'altra parte, se l'integrale all'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze è limitato, o se la serie a primo mebro è limitata, per il teorema della convergenza dominata, la precedente equazione ha senso e dunque si ha la tesi. □

Esempio 6.9.

(1) Se $\varphi(\Delta) \subset\subset \Delta$ allora per la Proposizione 6.8 l'operatore C_φ è di Hilbert-Schmidt e dunque compatto in $H^2(\Delta)$.

(2) *La mappa lenticolare.* Sia $C : \Delta \to H^+$ la trasformazione di Cayley definita da $C(z) := \frac{1+z}{1-z}$. Per $0 < a < 1$ definiamo $\varphi_a(z) := C^{-1}(C^a(z))$. Ovvero, "letta" su H^+ la mappa è data da $w \mapsto w^a$. Pertanto φ_a è continua su $\overline{\Delta}$ e $\varphi_a(\overline{\Delta} - \{-1, 1\}) \subset \Delta$ e $\varphi_a(\pm 1) = \pm 1$. Vogliamo provare che C_{φ_a} è di Hilbert-Schmidt. Per farlo vogliamo applicare la Proposizione 6.8. Pertanto dobbiamo provare che l'integrale in (6.2) è limitato vicino a ± 1. Occorre allora stimare l'integrando. Facciamolo per θ vicino a zero (per simmetria vale anche per θ vicino a π). Utilizzando le proprietà di conformità della trasformazione di Cayley C, è facile vedere che esiste $M > 0$ tale che per $\theta \simeq 0$ vale $\frac{|1-\varphi(e^{i\theta})|}{1-|\varphi(e^{i\theta})|} = M$. Pertanto

$$1 - |\varphi_a(e^{i\theta})|^2 = \frac{1-|\varphi_a(e^{i\theta})|^2}{|1-\varphi_a(e^{i\theta})|}|1-\varphi_a(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{M}|1-\varphi_a(e^{i\theta})|. \tag{6.3}$$

Ora

$$|1-\varphi_a(e^{i\theta})| = |1 - \frac{C^a(e^{i\theta})-1}{C^a(e^{i\theta})+1}| = \frac{2}{|C^a(e^{i\theta})+1|} \geq \frac{2}{|C^a(e^{i\theta})|+1}. \tag{6.4}$$

Dato che, con un conto diretto,

$$C(e^{i\theta}) = i\frac{1}{\tan\theta/2} \simeq 2/\theta,$$

dalla (6.3) e (6.4) risulta

$$1-|\varphi_a(e^{i\theta})|^2 \geq \text{cost.}|\theta|^a,$$

e dunque l'integrale in (6.2) converge e C_{φ_a} è compatto.

(3) Sia $0 < R < 1$ e definiamo $\varphi_R(z) := Rz + (1-R)$. La mappa φ_R è una omotetia che trasforma il disco unitario nel disco di centro $1-R$ e raggio R. Vogliamo provare che C_{φ_R} *non* è compatto. Per farlo utiliziamo la Proposizione 6.5. Sia k_w il funzionale di valutazione in $w \in \Delta$. Dal teorema di rappresentazione di Riesz segue che esiste una funzione in $H^2(\Delta)$, che indicheremo con $k_w(z)$ tale che $k_w(f) =< f, k_w >$ per $f \in H^2(\Delta)$. Utilizzando il Teorema 4.12 si riesce facilmente a provare che $k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}$. Poniamo

$$f_n(z) := \frac{k_{1-1/n}(z)}{\|k_{1-1/n}(z)\|} = \frac{\sqrt{1-(1-1/n)^2}}{1-(1-1/n)z}.$$

Allora con un calcolo diretto si vede che $f_n \to 0$ uniformemente sui compatti. Per la Proposizione 6.3 segue che $f_n \xrightarrow{d} 0$. Proviamo allora che $\|C_{\varphi_R} f_n\|^2$ non tende a zero per $n \to \infty$. Infatti

$$\|C_{\varphi_R} f_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz}(f_n \circ \varphi_R)(0) = \frac{\sqrt{1-(1-1/n)^2}((1-1/n)R)^n}{1-(1-1/n)(1-R))^{n+1}}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \ldots = \frac{2-1/n}{1+(1-1/n)(2R-1)} \to \frac{1}{R} \neq 0.$$

Pertanto per la Proposizione 6.5 l'operatore C_{φ_R} non è compatto in $H^2(\Delta)$.

Veniamo adesso ad un teorema di confronto che permette di determinare se un operatore di composizione è compatto conoscendo la natura di un altro:

Teorema 6.10 (Principio del Confronto)**.** *Siano $\varphi, \psi \in Hol(\Delta, \Delta)$. Supponiamo che φ sia univalente e che ψ sia* subordinata *a φ, ovvero*

$$\psi(\Delta) \subseteq \varphi(\Delta).$$

Allora se C_φ è compatto anche C_ψ è compatto.

Dim. Sia $\Phi := \varphi^{-1} \circ \psi$. Allora per le ipotesi $\Phi \in \text{Hol}(\Delta, \Delta)$. Inoltre, dato che $\varphi \circ \Phi = \psi$, segue che

$$C_\varphi = C_\Phi \circ C_\varphi,$$

da cui se C_φ è compatto segue subito che C_ψ è compatto. □

Corollario 6.11. (1) *Sia* $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$ *tale che* $\varphi(\Delta)$ *è contenuto in un settore angolare. Allora* C_φ *è compatto.*
(2) *Sia* $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$ *univalente e tale che* $\varphi(\Delta)$ *contenga un orociclo. Allora* C_φ *non è compatto.*

Dim. Dato che la mappa lenticolare φ_a dell'esempio 6.9.2 è univalente, 1) segue subito dal Teorema 6.10. La 2) segue dal Teorema 6.10 tenuto conto dell'esempio 6.9.3. $\square$

La discussione affrontata fino ad adesso rende evidente che l'operatore C_φ è compatto o meno a secondo del "contatto" di $\varphi(\Delta)$ con $\partial\Delta$. In effetti abbiamo il seguente risultato quantitativo:

Teorema 6.12. *Sia* $\varphi \in Hol(\Delta, \Delta)$*. Sia*

$$E(\varphi) := \{\theta \in (0, 2\pi] : |\varphi^*(e^{i\theta})| = 1\}.$$

Se la misura di Lebesgue di $E(\varphi)$ *è positiva allora* C_φ *non è compatto.*

Dim. Applichiamo la Proposizione 6.5. La successione $\{z^n\}$ converge uniformemente sui compatti a 0, $\|z^n\| = 1$ e dunque per la Proposizione 6.3 si ha $z^n \xrightarrow{d} 0$. Proviamo che $\|C_\varphi z^n\|^2 \not\to 0$. In effetti

$$\|C_\varphi z^n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_{E(\varphi)} |\varphi^*(e^{i\theta})|^{2n} d\theta = |E(\varphi)| > 0,$$

pertanto $\|C_\varphi z^n\|^2$ è limitato dal basso da una costante positiva indipendente da n e dunque non può convergere a zero. $\square$

Bibliografia

[**CG**] L. Carleson, T. W. Gamelin *Complex dynamics* Springer, Universitext 1995.
[**D**] P. Duren *Theory of H^p spaces* Academic Press 1970.
[**R**] W. Rudin *Analisi Reale e Complessa* Bollati Boringhieri.
[**S**] J. Shapiro *Composition Operators and the theory of functions* Springer, Universitext 1993.