Esercizi di Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

1. Sia $GL(n) := \{A \in \mathsf{Mat}(n \times n) : A \text{ è invertibile}\}$. Provare che $GL(n)$ è un gruppo non Abeliano rispetto al prodotto righe per colonne.

2. Sia V il sottoinsieme delle matrici 3×3 tali che $A +^t A = 0$ (qui 0 indica la matrice nulla). Provare che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e trovare la dimensione e una base.

3. Sia $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L_\alpha : \underline{x} \to A_\alpha \underline{x}$ dove

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2\alpha+2 & 4\alpha & 10\alpha+7 \\ -\alpha & -2\alpha+2 & -5\alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ autovalori e autovettori di L_α e dire quando L_α è diagonalizzabile.

4. Nello spazio affine sia fissato un sistema di riferimento ortogonale. Sia π il piano $x + 2\beta y + z = 3$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Sia π' il piano passante per i punti $(1/\alpha, 0, 1/\alpha)$, $(0,1,0)$ e $(1/\alpha, 1/2, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per quali valori di α e β i due piani sono paralleli? Per quali valori di α e β i due piani sono perpendicolari?

5. Sia $A' = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matrice 2×2 tale che $\det A' \neq 0$. Siano

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ -1 & c & d \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Si discutano al variare di α, β le soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = B$.

6. Determinare il rango della seguente matrice al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \beta & 0 \\ \alpha^3 & \alpha^3 & \alpha^5 & \alpha^2+\beta \end{pmatrix}$$

7. Sia fissato un riferimento ortogonale nello spazio. Determinare l'equazione parametrica e quella cartesiana del piano che contiene il punto $(1,0,1)$ e la retta passante per $(0,0,-1)$ con vettore direttore $\underline{v} = (0,1,-1)$. Determinare poi l'intersezione di questo piano con la retta r di equazione $x - y = 1, z = 0$.

8. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento ortogonale. Siano $P = (1,0,-1)$ e $Q = (-2,3,2)$. Determinare la distanza tra P e Q e l'angolo tra i vettori $P - Q$ e $Q - O$.

9. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard, sia V lo spazio ortogonale al vettore $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortonormale di V. Determinare poi la decomposizione di un qualunque vettore di $\mathbb{R}^4$ nella somma diretta $\mathbb{R}^4 = V \oplus \operatorname{span}\{v\}$.

10. Studiare il seguente sistema al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha x + z = 1 \\ x + \alpha y = 1 \\ 2\alpha y + z = \beta \end{cases}$$

11. Sia

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è invertibile e, per tali α, trovare l'inversa.

12. Sia $\mathcal{R} = \{O; x, y\}$ un sistema di riferimento ortonormale nel piano affine $\mathbb{A}^2$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ due vettori di coordinate $\mathbf{v} = (1,1)$ e $\mathbf{w} = (1,0)$ espresse nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$. Sia $O' = (1,1)$. Infine sia r la retta che passa per O' ed è ortogonale a v. Determinare l'equazione cartesiana di r nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$.

13. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia dato un sistema di riferimento affine. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica del piano passante per $P = (1,2,1)$ e che contiene la retta $y = 3x - 2, z = 0$.

14. In un fissato riferimento affine dello spazio si consideri la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 - h, \\ y = h - 1, \\ z = 1 \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere:
(a) La retta r contiene il punto $(0,0,1)$,
(b) La retta r contiene il punto $(-1,1,0)$,
(c) La retta r è parallela al piano di equazione $x + y = 1$,
(d) La retta r è parallela al piano di equazione $z = -1$,

15. Sia $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare autoaggiunta con autovalori $1, 2, 3$. Sapendo che l'autospazio relativo a 1 è generato da $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e l'autospazio relativo a 2 è generato da $u := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare l'equazione cartesiana dell'autospazio relativo all'autovalore 3.

16. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ munito del prodotto scalare standard, sia fissata una base ortonormale. Sia V lo spazio vettoriale ortogonale allo spazio $x - y = 0$. Determinare una base di V. Trovare poi una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, con coordinate $\{x', y'\}$ tale che V sia dato da $x' = 0$. Determinare poi le coordinate del vettore $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nella nuova base.

17. Sia V uno spazio vettoriale metrico con base ortonormale $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$ e sia W un altro spazio vettoriale metrico con base ortonormale $\mathcal{U} := \{u_1, u_2, u_3\}$. Sia $L : V \to W$ l'applicazione lineare tale che $L(e_1) = u_1 - u_2$, $L(e_2) = u_3$. Trovare la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{E}, \mathcal{U}$. Determinare una base del nucleo e dell'immagine di L. Dire se L è una isometria. Trovare l'aggiunto di L. Determinare una base di V e una di W tale che la matrice associata a L in tali basi sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. È possibile ottenere lo stesso risultato scegliendo una base ortonormale di V e una ortonormale di W?

18. Determinare delle equazioni che rappresentino il luogo di punti in $\mathbb{A}^3$ che distano 1 dal punto $(1, 0, 1)$. Tale insieme è una sottovarietà affine di $\mathbb{A}^3$?

19. Dare un esempio di una matrice 2×2 che non sia diagonalizzabile ma abbia 0 come autovalore di molteplicità algebrica 2. Quanto è la molteplicità geometrica di 0? È possibile costruire tale esempio con una matrice simmetrica?

20.(difficile) Sia V uno spazio vettorialedi dimensione 2. Sia $L : V \to V$ una applicazione lineare tale che $L \circ L = L$. Provare che L è diagonalizzabile. Provare che L può essere solo l'applicazione nulla, oppure l'applicazione identica, oppure esiste un prodotto scalare su V tale che L è la proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione 1 di V.

21. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard siano $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Provare che $\mathcal{V} := \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare che ha matrice associata $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{V}$. Determinare la matrice associata all'aggiunta di L nella base $\mathcal{V}$. [Attenzione: NON è la trasposta di A!]