VI appello 11/2/19 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2.

(a) Se $v_1, v_2, v_3 \in V$ generano V, allora sono una base di V.
(b) V di dimensione 2 significa che V contiene esattamente 2 elementi.
(c) Se $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente indipendenti allora $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\} = V$.
(d) Se W è un'altro spazio vettoriale di dimensione 2 allora W è isomorfo a V.

Q2) Sia $A_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita tramite:

$$A_\alpha(x, y) = (x + 2\alpha, y - x + \alpha x^2)$$

(a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, A_α è un'applicazione lineare.
(b) Per $\alpha = 0$, A_α è suriettiva.
(c) Se $\alpha = 1$, A_α è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.
(d) Per $\alpha = 0$, A_α è diagonalizzabile.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $w \in W$ esiste un unico $v \in V$ tale che $L(v) = w$ allora $n = m$.
(b) Se per ogni $w, w' \in W$ esiste un unico $v \in V$ tale che $L(v) = w - w'$ allora L è iniettivo.
(c) Se $\dim \ker L = 0$ allora $m < n$.
(d) Se L è iniettivo allora $n + m = \dim \mathsf{Im}\, L$.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $u \in \text{span}\{v, w\}$.
(b) Se u, v sono linearmente indipendenti allora $\langle u, w \rangle = 0$ oppure $\langle v, w \rangle = 0$.
(c) Se $\{u, v, w\}$ è una base ortogonale di V allora lo spazio ortogonale a $\text{span}\{v, w\}$ contiene u e $\langle v, w \rangle = 0$.
(d) Se lo spazio ortogonale a $\text{span}\{v, w\}$ contiene u e $\langle v, w \rangle = 0$ allora $\{u, v, w\}$ $\grave{2}$ una base ortogonale di V.

Q5) Siano A, B, C matrici $n \times n$.

(a) Se $AB = C$ e C è invertibile, allora $\det A \neq 0$.
(b) Se $AB = I$ allora $ACB = C$.
(c) Se il rango di A è $m < n$ e $A = BC$, allora il rango di B e di C è $< m$.
(d) Se C è invertibile, allora $\text{rank}(ACB) = \text{rank}(AB)$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) Il piano affine passante per $(1, 0, 1)$ e il cui spazio ortogonale è generato dal vettore $(1, 0, -1)$ è dato da $x = z$.
(b) L'equazione $x = 2\lambda - 2\mu, y = 3, z = \lambda - 2\mu + 4$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ è l'equazione cartesiana di un piano.
(c) Se due rette r, s non si intersecano allora i loro spazi tangenti coincidono.
(d) Se lo spazio tangente ad un piano affine contiene lo spazio ortogonale ad una retta affine, allora la retta è parallela al piano.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y).

(a) Se r è la retta definita da $x + y = 4$, non è possibile trovare una isometria T tale che $T(r) = \{x = 0\}$.
(b) Sia r la retta $x = y - 1$. La retta s ortogonale a r e passante per $(0, 0)$ contiene il punto $(1, -1)$.
(c) Siano $A = (1, -1)$ e $B = (-1, 1)$. Se T è una isometria, allora la distanza tra $T(A)$ e $T(B)$ è $2\sqrt{2}$.
(d) Se r è la retta passante per $(1, 2)$ e ortogonale alla retta $x - y = 0$, l'equazione parametrica di r è $x = \lambda + 1, y = 2\lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : x^2 - 2\alpha x - \beta y + \alpha^2 + \alpha = 0$ una famiglia di coniche al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha = 0$ la conica è sempre degenere.
(b) Esistono valori α, β per cui la conica è affinemente equivalente ad una ellisse.
(c) Esistono valori α, β per cui la conica è affinemente equivalente ad una iperbole.
(d) Esistono valori α, β per cui la conica è affinemente equivalente ad una parabola.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia A_α la matrice definita da

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha+2 & \alpha & 2\alpha & -4\alpha-3 \\ -\alpha & -\alpha+2 & -2\alpha & 4\alpha+3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare per quali valori di α la matrice A_α è invertibile.
(2) Determinare per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile.
(3) Per i valori α per cui A_α è diagonalizzabile, determinare la matrice di cambiamento di coordinate che rende A_α diagonale.

Soluzioni:

Q1: c, d
Q2: b,
Q3: a, b
Q4: c, d
Q5: a
Q6: a, b
Q7: b,c
Q8: d

Parte II:

(1) Calcolando il determinante di A_α (ad esempio usando il metodo di Laplace rispetto alla quarta riga), si ottiene $\det A_\alpha = -8$. Pertanto A_α è invertibile per ogni α.
(2) calcolando il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A_α si ottiene

$$p(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = (2-\lambda)^3(-1-\lambda).$$

Pertanto gli autovalori sono $-1, 2$ per ogni α. La molteplicità algebrica dell'autovalore -1 è 1 (e dunque coincide con la molteplicità geometrica). Dunque A_α è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 (che è 3) coincide con la sua molteplicità geometrica. Quest'ultima è $4 - rk(A_\alpha - 2I)$. Ora, la matrice $A_\alpha - 2I$ ha rango 2 se $\alpha \neq 0$ e ha rango 1 se $\alpha = 0$. Pertanto, A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha = 0$.
(3) Poniamo $\alpha = 0$. Il sistema $(A_0+I)\underline{x} = \underline{0}$ ha come base delle sue soluzioni il vettore $(-1, 1, -2, -1)$. Il sistema $(A_0-2I)\underline{x} = \underline{0}$ ha come base delle sue soluzioni i vettori $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Pertanto, posta

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

risulta $C^{-1}A_0C$ diagonale.