VI appello 17/9/15 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2014-15

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$.

(a) Sia $S \subset V$ un sottoinsieme. Se $\mathrm{span}(S) = V$ allora esistono n vettori linearmente indipendenti contenuti in S.
(b) Ogni sottoinsieme S di V costituito da $n+1$ vettori forma un sistema di generatori di V.
(c) Se $W \subset V$ è un sottospazio di dimensione $m < n$, allora esiste una base di V i cui elementi appartengono tutti a W.
(d) Ogni insieme formato da $n+1$ vettori di V contiene una base di V.

Q2) Sia A_α la seguente matrice al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Se $\alpha \neq 0$ la matrice A_α è diagonalizzabile.
(b) Se $\alpha = 1$, esiste una matrice ortogonale O tale che $O \cdot A_\alpha \cdot {}^t O$ sia diagonale.
(c) Per $\alpha = 3$ la matrice A_α è invertibile.
(d) per ogni α, 1 è un autovalore di A_α di molteplicità algebrica 4.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) L non è suriettiva se e solo se esiste $w \in W$ tale che $L^{-1}(w) = \emptyset$.
(b) Se $n < m$ allora l'applicazione L è iniettiva.
(c) Se $n = m$ e L è invertibile, allora, dato $v \in V$, $L(v) = 0$ se e solo se $v = 0$.
(d) Se $n > m$ allora $\ker L = \{0\}$ se e solo se L è suriettiva.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti, allora esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di V tale che $\text{span}\{v_1\} = \text{span}\{e_1\}$ e $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{e_1, e_2\}$.
(b) Se la dimensione dello spazio ortogonale a $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è 0, allora $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ oppure $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ oppure $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$.
(c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti, la dimensione dello spazio ortogonale a $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è maggiore di 0.
(d) Se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, allora lo spazio ortogonale a $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione almeno 2.

Q5) Siano A, B, C due matrici 4×4.

(a) Se $A + B = C$, allora $\det A \cdot \det B = \det C$.
(b) Se C è ortogonale allora $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(B) \cdot \det(A)$.
(c) Se A, C sono invertibili, allora $\text{rango}(A \cdot B \cdot C) = \text{rango}(B)$.
(d) Se $\text{rango}(A \cdot B \cdot C) = 4$ allora A, B, C sono invertibili.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) Sia (a, b, c) un vettore non nullo, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}^3$. Sia r la retta di equazione $x = x_0 + \lambda a, y = y_0 + \lambda b, z = z_0 + \lambda c$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Il punto $(0, 0, 0)$ appartiene a r se e solo se $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.
(b) I punti di coordinate $x = 2\lambda + 2\mu, y = \lambda + \mu, z = -\lambda - \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ formano un piano.
(c) Ogni piano ortogonale alla retta $x - y = 0, x - 2z = 1$ ha spazio normale generato dal vettore $(1, -1, 0)$ oppure dal vettore $(1, 0, -2)$.
(d) La distanza tra il piano $z = 0$ e il piano $2z = 2$ è 1.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y) e origine O. Sia C una matrice 2×2 ortogonale e sia $A = C + C$. Sia $B \in \mathbb{R}^2$ un vettore colonna. Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita tramite $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

(a) Se $C = Id$ allora T è una isometria.
(b) Se B è il vettore nullo, allora T è una isometria.
(c) Se $P, Q \in \mathbb{A}^2$ sono due punti la cui distanza è pari a 1, allora la distanza tra $T(P)$ e $T(Q)$ è 2.
(d) L'immagine di una retta affine r tramite T è una parabola.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : \alpha x^2 + \beta y^2 - 2\alpha^2 x - 2\alpha\beta y + \alpha^3 + \beta\alpha^2 - 1 = 0\}$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) L'insieme $C_{\alpha,\beta}$ è una conica degenere per $\beta \cdot \alpha = 0$.
(b) Per $\alpha > 0, \beta > 0$, l'insieme $C_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Per $\alpha < 0, \beta > 0$, l'insieme $C_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Per $\alpha > 0, \beta = 0$, l'insieme $C_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una parabola.

Soluzioni:

Q1: a
Q2: c, d
Q3: a, c
Q4: a
Q5: c, d
Q6: d
Q7: c
Q8: a

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare definita tramite

$$T(A) = A \cdot C.$$

(1) Determinare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di T.
(2) Trovare la matrice associata a T nella base canonica di V (ovvero nella base formata da $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, dove E_{ij} è la matrice con entrate 1 in posizione (i, j) e 0 altrimenti, $i, j = 1, 2$).
(3) Determinare autovalori e autovettori di T e dire se è diagonalizzabile.

Soluzione: (1) Essendo $\det C \neq 0$, la matrice C è invertibile. Pertanto, essendo $\ker T = \{A \in V : A \cdot C = 0\}$ (qua 0 =matrice nulla), risulta che se $A \in \ker T$, allora

$$0 = 0 \cdot C^{-1} = (A \cdot C) \cdot C^{-1} = A \cdot (C \cdot C^{-1}) = A,$$

pertanto $\ker T = \{0\}$. Dunque $\dim \ker T = 0$ e dal teorema della dimensione segue che $\dim \mathsf{Im}\, T = \dim V = 4$. Dunque $\mathsf{Im}\, T = V$ e una base di $\mathsf{Im}\, T$ è una qualunque base di V.

(2) Per trovare la matrice associata a T nella base canonica di V, occorre scrivere le immagini tramite T di $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ come combinazione lineare di $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$. Pertanto

$$T(E_{11}) = E_{11} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} - E_{12}.$$

$$T(E_{12}) = E_{12} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}.$$

$$T(E_{21}) = E_{21} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = E_{21} - E_{22}.$$

$$T(E_{22}) = E_{22} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}.$$

Pertanto la matrice M_T associata a T nella base canonica è:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Utilizziamo la matrice M_T trovata in precedenza. Gli autovalori di T sono le radici del polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = \det(M_T - \lambda Id)$. Dunque

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - \lambda + 1)^2.$$

Poiché il polinomio $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ha radici reali, l'operatore T non ha autovalori reali e dunque non vi sono autovettori in V. In particolare, T non è diagonalizzabile.