**IV appello 5/2/18 — Geometria per Ingegneria Civile e Ambientale**
**Prof. F. Bracci — A.A. 2016-17**

**Nome e Cognome (in stampatello e leggibile):** ____________________

---

**PARTE I:** Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

---

**Q1)** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 4.

(a) Siano $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$. Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti allora sono anche un sistema di generatori di $V$.

(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ sono un sistema di generatori di $V$, allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(c) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ e $\dim(\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 4$ allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

(d) Se $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in V$ sono un sistema di generatori, allora comunque scelti 4 elementi di $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, questi formano una base di $V$.

---

**Q2)** Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile per ogni valore di $\alpha, \beta$.

(b) $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile se e solo se $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

(c) Per ogni valore di $\alpha, \beta$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ ha un autovalore di molteplicità geometrica almeno 2.

(d) Se $\alpha \neq \beta$, $A_{\alpha,\beta}$ ha un autovalore di molteplicità geometrica 1.

---

**Q3)** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $w \in V$ esiste $v \in V$ tale che $L(v) = w$ allora $L$ è iniettivo.

(b) Se per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $L(v) = w$ allora $\ker L = \{0\}$.

(c) Esiste una base di $V$ tale che la matrice associata a $T$ sia diagonale.

(d) Se $\dim \mathsf{Im}\, T < n$ allora $\ker L$ non è ridotto al solo vettore nullo.

**Q4)** Sia $A$ una matrice simmetrica $3 \times 3$.

(a) Se il determinante di $A$ è strettamente positivo allora tutti gli autovalori di $A$ sono positivi.
(b) Se la traccia di $A$ è 0, allora $A$ non è invertibile.
(c) Il polinomio caratteristico di $A$ non può essere $p(\lambda) = -\lambda(1 + \lambda^2)$.
(d) Se $A$ ha il solo autovalore 0 allora $A$ è la matrice nulla.

---

**Q5)** Siano $A, B, C$ tre matrici quadrate $n \times n$, $n \geq 2$.

(a) Se $\det AB \neq 0$ e $C = ABABA$, allora $C$ è invertibile.
(b) Sia $B$ invertibile. Esistono esempi tali che $AB = BC$ e $\det A \neq \det C$.
(c) Se $A = BC$ e $\det A \neq 0$, allora il sistema lineare $C\underline{x} = \underline{b}$ ammette una soluzione $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ per ogni $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$.
(d) Se $AB = BA$ allora $ABC = CBA$.

---

**Q6)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini $(x, y, z)$. Sia $S$ l'insieme definito da $x = 0, y = 0, z = \mu + \lambda$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) $S$ è un piano affine.
(b) $S$ è una retta affine.
(c) Lo spazio tangente ad $S$ è generato dal vettore $(0, 0, -1)$.
(d) Lo spazio normale ad $S$ è generato dal vettore $(0, 0, 1)$.

---

**Q7)** Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini $(x, y)$. Sia $r$ la retta data da $x = 1$ e $s$ la retta data da $x + y = 1$.

(a) Esiste un cambiamento ortonormale di coordinate affini tale che nel nuovo sistema di riferimento $r$ ed $s$ coincidono con gli assi del sistema di riferimento.
(b) Esiste una rotazione del piano affine che manda la retta $s$ sulla retta $r$.
(c) La distanza di $r$ da $s$ è 1.
(d) Ogni retta affine in $\mathbb{A}^2$ interseca la retta $r$ o la retta $s$ (o entrambe).

---

**Q8)** Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini $(x, y)$. Sia $C_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x^2 + \alpha y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $C_\alpha$ è una iperbole per $\alpha > 0$.
(b) $C_\alpha$ è una ellisse per $\alpha = -1$.
(c) $C_\alpha$ è una parabola per $\alpha = 0$.
(d) Esistono valori di $\alpha$ per cui $C_\alpha$ è metricamente equivalente ad una circonferenza di raggio 1.

**PARTE II:** Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

---

Sia $\mathbb{A}^3$ lo spazio affine munito di un sistema di riferimento ortonormale con coordinate $(x, y, z)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta $r$ parallela alla retta $x = y, z = 1$ e passante per $(1, 0, 0)$.
(2) Determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica del piano $\pi$ ortogonale a $r$ e passante per $(1, 1, 1)$.
(3) Trovare la distanza del piano $\pi$ dal punto $O = (0, 0, 0)$.
(4) Trovare l'area del triangolo con vertici $A := \pi \cap r$, $B = (0, 0, 1)$ e $O$.

**Soluzioni:**
Q1) b, c
Q2) b
Q3) a, d
Q4) c, d
Q5) a, c
Q6) b, c
Q7) b, d
Q8) d

**Parte II**

(1) Ogni retta parallela ad $s$ ha la forma $x - y = a, z = b$ per $a, b \in \mathbb{R}$. La condizione $(1, 0, 0) \in r$ implica $1 = a, 0 = b$, ovvero $r$ ha equazione cartesiana $x - y = 1, z = 0$. L'equazione parametrica è dunque $x = \lambda + 1, y = \lambda, z = 0$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Il vettore normale a $\pi$ è $(1, 1, 0)$. Dunque l'equazione cartesiana di $\pi$ è $x + y = c$ per $c \in \mathbb{R}$. Per trovare $c$, imponiamo la condizione $(1, 1, 1) \in \pi$, da cui si ottiene $1 + 1 = c$. Pertanto l'equazione cartesiana di $\pi$ è $x + y = 2$. L'equazione parametrica è $x = -\lambda + 2, y = \lambda, z = \mu$, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(3) Essendo $\underline{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ortogonale a $\pi$ e di norma 1, la distanza tra $\pi$ e $O$ è data da $|\langle P - O, \underline{n}\rangle|$, dove $P$ è un qualunque punto di $\pi$, ad esempio, $P = (2, 0, 0)$. Da cui si ottiene che la distanza tra $\pi$ e $O$ è $\sqrt{2}$.

(4) Intersecando $\pi$ e $r$ si ottiene $A = (3/2, 1/2, 0)$. L'area del triangolo di vertici $A, B, O$ si può calcolare usando il prodotto vettoriale, ovvero, l'area è uguale a $\frac{1}{2}|(A - O) \wedge (B - O)|$. Svolgendo i calcoli si trova

$$(A - O) \wedge (B - O) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0) \wedge (0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0).$$

Pertanto $\frac{1}{2}|(A - O) \wedge (B - O)| = \frac{\sqrt{10}}{4}$.