V appello 21/1/19 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

(a) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ generano V, allora sono una base di V.
(b) Ogni insieme composto da 5 o più vettori di V forma una base di V.
(c) Se $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente indipendenti allora ogni sottospazio vettoriale di V di dimensione ≥ 3 ha intersezione di dimensione almeno 1 con $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$.
(d) Se W è un sottospazio di V tale che per ogni $v \in V$ esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\lambda v \in W$ allora $V = W$.

Q2) Sia $A_{\alpha,\beta}$ la seguente matrice al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile se $\alpha \neq \beta$.
(b) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile se $\alpha \neq \beta$.
(c) Se $\alpha \neq 0$ la matrice non è diagonalizzabile.
(d) Se $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile, allora è diagonalizzabile.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se $n = m$ allora L è suriettivo.
(b) Se per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in W$ tale che $L(v) = w$ allora L è iniettivo.
(c) Se $m > n$ allora $\dim \mathsf{Im}\, L = n$.
(d) Se L è suriettivo allora $m \leq n$.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 2 e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle v, w \rangle = 0$ allora $u \in \operatorname{span}\{v, w\}$.
(b) Se u, v sono linearmente dipendenti allora $\langle u, v \rangle \neq 0$
(c) Se $\langle w + u, w + v \rangle = 0$ allora $\{u, v, w\}$ non possono essere una base ortogonale.
(d) Se $\{u, v\}$ è una base ortogonale di V non ortogonale, allora $\langle u, w \rangle = 0$ oppure $\langle v, w \rangle = 0$.

Q5) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Se $a \neq b$ il rango di A è 3.
(b) Se per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ il sistema $Ax = v$ ha soluzione, per $x \in \mathbb{R}^4$, allora $a \neq 0$.
(c) Il rango di A è ≥ 2 per ogni α, β.
(d) Se $b \neq 0$ il sistema $Ax = v$, $x \in \mathbb{R}^4$ ha una unica soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) La retta passante per $(1, 0, 1)$ e il cui spazio tangente è generato dal vettore $(1, 0, 1)$ è contenuta nel piano $2x - 5y - 2z = 0$.
(b) L'equazione $x = 2\lambda - 4\mu, y = 3, z = \lambda - 2\mu + 4$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ è l'equazione cartesiana di un piano.
(c) Date due rette r, s che non si intersecano, se $(Tr)^\perp = (Ts)^\perp$ esiste un unico piano che le contiene entrambe.
(d) Sia r una retta e π un piano. Allora esiste un piano π' che contiene r ed è ortogonale a π.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una affinità.

(a) Se r e s sono due rette tali che $T(s) \cap T(r) \neq \emptyset$, allora $r \cap s \neq \emptyset$.
(b) Sia r la retta $x + y = 0$. Allora $T(r)$ è una retta che contiene $(0, 0)$.
(c) Siano $A = (1, -1)$ e $B = (-1, 1)$. Se la distanza tra $T(A)$ e $T(B)$ è $2\sqrt{2}$ allora T è una isometria.
(d) Se T è una isometria e r, s sono due rette ortogonali tra loro, $T(r)$ e $T(s)$ sono ortogonali.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : x^2 + \beta y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$ una famiglia di coniche al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\beta = 1$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una ellisse.
(b) Se $\alpha = \beta \neq 0$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica degenere.
(c) Se $\beta < 0$, $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una iperbole.
(d) Esistono valori di α, β per cui $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ è una conica affinemente equivalente ad una parabola.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z). Infine, sia V lo spazio generato dai vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Trovare una base di V.
(2) Trovare una base ortogonale dello spazio ortogonale a V.
(3) Trovare una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ determinato da $x + y - 2z = 0, x + y + z = 0$
(4) Trovare la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

Soluzioni:

Q1: a, c, d
Q2: c
Q3: d
Q4: a, b, c
Q5: c
Q6: a, c, d
Q7: a, d
Q8: a, c

Parte II:

(1) Si vede che $v_3 = 2v_1 - v_2$ e che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti. Pertanto $\{v_1, v_2\}$ sono una base di V.
(2) Si calcola $u := v_1 \wedge v_2$:

$$u := \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 4e_2 + 4e_3.$$

Il modulo di u è 6, pertanto una base ortonormale di $V^\perp$ è data da

$$\frac{u}{\|u\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(3) Si vede che la matrice associata al sistema omogeneo ha rango 2 (ovvero le due equazioni sono indipendenti). Pertanto una base di W è data da una soluzione non nulla del sistema, ad esempio $t := (1, -1, 0)$.
(4) Poiché $\{v_1, v_2, t\}$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $\dim(V + W) = 3$ e, da Grassmann, $\dim(V \cap W) = 0$.