V appello 1/9/15 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2014-15

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$.

(a) Ogni sottoinsieme infinito di V è un sottospazio vettoriale di V.
(b) Se $S \subset V$ è un insieme infinito, allora $\operatorname{span}(S) = V$.
(c) Se W è un sottospazio di dimensione $m < n$, allora esistono $n-m$ vettori linearmente indipendenti che non appartengono a W.
(d) Ogni insieme formato da n vettori è una base di V.

Q2) Sia $A_{\alpha,\beta}$ la seguente matrice al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Se $\alpha \neq \beta$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(b) Se $\alpha \neq 1$, allora α è un autovalore di $A_{\alpha,\beta}$ la cui molteplicità geometrica è 2.
(c) Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$, allora 1 è un autovalore di $A_{\alpha,\beta}$ la cui molteplicità geometrica è 2.
(d) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, allora 1 è un autovalore di $A_{\alpha,\beta}$ la cui molteplicità geometrica è 2.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se ogni elemento di V ha immagine in W tramite L, allora L è suriettiva.
(b) Se, per ogni coppia $v, w \in V$ risulta $L(v) \neq L(w)$, allora L è iniettiva.
(c) Se $n > m$ allora esistono $v, w \in V$ tali che $L(v) = L(w)$.
(d) Se $n \geq m$ allora L è suriettiva.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Esiste una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ di V tale che $\operatorname{span}\langle v_j \rangle = \operatorname{span}\langle e_j \rangle$ per $j = 1, 2, 3$.
(b) Se la dimensione dello spazio ortogonale a $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è 1, allora $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ oppure $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ oppure $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$.
(c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti, la dimensione dello spazio ortogonale a $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è strettamente maggiore di 0.
(d) Se v_1 è multiplo di v_2, allora $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ se e solo se $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$.

Q5) Siano A, B due matrici 3×3.

(a) Se $\det A = 0$, allora $\det(A \cdot B) = \det(B)$.
(b) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
(c) Se A è invertibile, allora $\operatorname{rango}(A \cdot B \cdot A^{-1}) = \operatorname{rango}(B)$.
(d) $\operatorname{rango}(A \cdot B) \geq \operatorname{rango}(B)$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) I punti che soddisfano le equazioni $x + y + z = 0, -2x - 2y - 2z + 1 = 1$ sono contenuti in una retta.
(b) I punti di coordinate $x = 2\lambda + \mu, y = \lambda + \mu, z = \lambda + \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ formano un piano.
(c) Ogni retta ortogonale al piano $x - y = 0$ ha spazio tangente generato dal vettore $(1, 1, 0)$ oppure dal vettore $(0, 0, 1)$.
(d) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. Sia r_α la retta di equazione parametrica $x = \alpha + \lambda, y = -\lambda + 1, z = 2\lambda - 2$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora r_α contiene l'origine se e solo se $\alpha = -1$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia A una matrice 2×2 ortogonale e sia $B \in \mathbb{R}^2$ un vettore colonna. Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita tramite $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

(a) T è una isometria solo se B è il vettore nullo.
(b) Per ogni scelta di B la trasformazione T fissa l'origine.
(c) Se $P, Q \in \mathbb{A}^2$ sono due punti la cui distanza è pari a 2, allora la distanza tra $T(P)$ e $T(Q)$ è 2.
(d) L'immagine di una retta affine r tramite T è una retta affine.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x^2 + \alpha y^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 - 1 = 0\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) L'insieme C_α è una conica non degenere per qualunque valore di α.
(b) Per $\alpha > 0$, l'insieme C_α è una conica affinemente equivalente ad una ellisse.
(c) Per $\alpha = 0$ l'insieme C_α è una conica affinemente equivalente ad una parabola.
(d) Per $\alpha < 0$ l'insieme C_α è una conica affinemente equivalente ad una iperbole.

Soluzioni:

Q1: c
Q2: b, c
Q3: b, c
Q4: c, d
Q5: b, c
Q6: b, d
Q7: c, d
Q8: b, d

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Si risolva il seguente sistema lineare con incognite x, y, z al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta z = \beta \\ x + \alpha z = \alpha \\ \alpha y - \beta z = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Sia

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

la matrice incompleta del sistema e sia

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & \beta \\ 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice completa del sistema.

Il determinante di A è

$$\det A = \alpha(\beta - \alpha^2).$$

Se $\det A \neq 0$, per il teorema di Cramer il sistema ammette una unica soluzione (x_0, y_0, z_0) ed è data da

$$x_0 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y_0 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z_0 = \frac{\det A_2}{\det A},$$

dove A_j è la matrice ottenuta da A sostituendo alla j-sima colonna di A il vettore colonna $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha dunque

$$x_0 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} \beta & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & -\beta \end{pmatrix} = 0$$

$$y_0 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix} = \frac{(\beta - \alpha^2)(1 + \beta)}{\alpha(\beta - \alpha^2)} = \frac{1 + \beta}{\alpha}$$

$$z_0 = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\beta - \alpha^2)}{\alpha(\beta - \alpha^2)} = 1.$$

Pertanto, per $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha^2$ il sistema ammette una unica soluzione data da $(0, \frac{1+\beta}{\alpha}, 1)$.

Studiamo adesso il caso $\det A = 0$. Consideriamo prima il caso $\alpha = 0$. Se $\beta = 0$ la matrice A ha rango 1, se $\beta \neq 0$ la matrice A ha rango 2. Se $\beta = 0$ la matrice B ha rango 2. Pertanto dal teorema di Rouché-Capelli segue che per $\alpha = \beta = 0$ il sistema non ammette soluzione.

Nel caso $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ consideriamo la sottomatrice B', 3×3, di B formata dalla prima, terza e quarta colonna:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta $\det B' = -\beta(\beta + 1)$. Pertanto, per $\beta \neq -1$ si ha $\det B' \neq 0$, dunque B ha rango 3 e dal teorema di Rouché-Capelli segue che per $\alpha = 0$, $\beta \neq 0, -1$ il sistema non ammette soluzione.

Per $\alpha = 0, \beta = -1$ il rango di A e di B è uguali, pari a 2, dunque esistono ∞^1 soluzioni. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} -z = -1 \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $(0, \lambda, 1)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Infine consideriamo il caso $\alpha \neq 0$, $\beta = \alpha^2$ (per cui $\det A = 0$). In tal caso si verifica facilmente che A ha rango 2 (basta vedere che per $\alpha \neq 0$ la prima e la seconda colonna di A sono linearmente indipendenti). Per quanto riguarda la matrice B, si ha

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di B, utilizziamo il teorema degli orlati. Consideriamo la sottomatrice 2×2 formata dagli elementi della prima e seconda colonna che stanno nella seconda e terza riga. Questa matrice ha determinante diverso da zero. Poiché siamo nel caso $\det A = 0$, basta dunque orlare tale sottomatrice con la quarta colonna e studiare il determinante della matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det M = 0$, ne segue dal teorema degli orlati che B ha rango 2. Dunque, dal teorema di Rouché-Capelli segue che per $\alpha \neq 0$, $\beta = \alpha^2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni. In tal caso il sistema è dato da

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^2 z = \alpha^2 \\ x + \alpha z = \alpha \\ \alpha y - \alpha^2 z = 1 \end{cases}$$

la prima equazione si ottiene dalla seconda moltiplicando per α, e le soluzioni sono date da $(\alpha(1-\lambda), \frac{1}{\alpha} + \alpha\lambda, \lambda)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.