V appello 3/9/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Eventuali correzioni devono essere segnalate con un "NO"*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7.

(a) Ogni insieme di n vettori di V con $n \leq 7$ genera V.
(b) Esistono 7 vettori di V tali per cui ogni altro vettore di V è loro combinazione lineare.
(c) Se un sottospazio $W \subset V$ ha dimensione 7 allora $W = V$.
(d) Se $v, w \in V$ sono tali che $0v + 0w = 0$, allora v, w sono linearmente indipendenti

---

Q2) Sia A_α la matrice data da:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α non è mai invertibile.
(b) La molteplicità algebrica di α è 2 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) La molteplicità geometrica di α è 1 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
(d) Se $\alpha = 0$, la matrice è diagonalizzabile.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se T è iniettivo allora $\dim \mathsf{Im}T = \dim \mathsf{Ker}T$.
(b) Se T non è iniettivo allora 0 è un autovalore di T.
(c) Se T è invertibile allora 0 è un autovalore di T^{-1}.
(d) Se T è diagonalizzabile allora T è suriettivo.

Q4) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dotato del prodotto scalare standard e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $v \wedge w = u$ allora u e v sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\langle u, v \rangle = 0$ allora u, v sono linearmente indipendenti.
(c) Se v, w, u formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ allora $\langle v \wedge w, u \rangle = 0$.
(d) Se u, v sono linearmente indipendenti, allora $\langle u, w \rangle = 0$ oppure $\langle u, v \rangle = 0$.

Q5) Siano A, B, C matrici 2×2.

(a) Se $\det(ABC) = 0$ e A, B sono invertibili, allora $\det C = 0$.
(b) Se $A = C^{-1}$ allora $\det[A \cdot B \cdot C] = \det A$.
(c) Se $\det A = \det(AB)$ allora $A = B^{-1}$.
(d) Se $\det(ABC) \neq 0$ allora il rango di B è 2.

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se L possiede n autovalori distinti allora L è auto-aggiunto.
(b) Se L è auto-aggiunto possiede n autovalori distinti.
(c) Se L è auto-aggiunto, la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è n.
(d) Se $L(v) = 0$ per ogni $v \in V$ allora L è auto-aggiunto.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : \alpha^2 x^2 + \alpha y^2 + 2\alpha^2 x + \alpha^2 - 1 = 0\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha < 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una parabola.
(b) Se $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è una retta doppia.
(c) Se $\alpha > 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Se $\alpha = 1$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia π il luogo dei punti di $\mathbb{A}^3$ che soddisfa l'equazione $x = 0$.

(a) π è una retta ortogonale al piano che passa per O ed è normale al vettore $(1, 0, 0)$.
(b) π è un piano tangente ai vettori $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$
(c) Ogni piano di $\mathbb{A}^3$ il cui spazio tangente contiene il vettore $(1, 1, 0)$ interseca π in una retta.
(d) lo spazio tangente a π è generato dal vettore $(0, 1, 0)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine $\mathcal{R}$ ortonormale con coordinate affini (x, y). Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) $\mathcal{R}' := \{(0,0); v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine non ortogonale.
(b) L'angolo tra i vettori v_1, v_2 è $\pi/2$.
(c) Sia P un punto fissato. Senza conoscere le coordinate di P non è possibile calcolare la distanza tra il punto $P + v_1$ e il punto $P + v_2$.
(d) La retta passante per $(1, 1)$ e tangente a v_1 è ortogonale alla retta passante per $(1, 1)$ e tangente a v_2.

Q10) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali di dimensione positiva tali che $U \neq W$.

(a) Se $U \cap W \neq \{0\}$ allora $V + W$ ha dimensione 5,
(b) Se $U + W = V$ allora ogni vettore di v si scrive come somma di un vettore di U e di un vettore di W.
(c) Se ogni vettore di v si scrive come somma di un vettore di U e di un vettore di W allora $U \cap W = \{0\}$.
(d) Se $U + W$ ha dimensione 4 e U, W hanno dimensione 3, allora $U \cap W \neq \{0\}$.

Soluzioni:

Q1) b, c
Q2) a, c
Q3) b
Q4) a, b
Q5) a, d
Q6) c, d
Q7) c, d
Q8) c
Q9) a
Q10) b, d

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita tramite

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ c \\ c+d \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare autovalori e autovettori di T.
(2) Dire (motivando opportunamente la risposta) se T è diagonalizzabile e in caso lo sia, determinare la sua forma diagonale.
(3) Siano $V_1 = \mathsf{span}(e_1, e_2)$ e $V_2 = \mathsf{span}(e_3, e_4)$ dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ indica la base canonica standard di $\mathbb{R}^4$. Provare che $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ e che $T(V_1) = V_1, T(V_2) = V_2$.
(4) Siano $v_1 := e_1 + e_2, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_3 + e_4, v_4 = e_4$. Provare che $\{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e determinare la matrice associata a T in tale base.

P2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y, z). Sia π il piano passante per i punti $(1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, -1)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e parametrica del piano π.
(2) Determinare l'equazione cartesiana e parametrica della retta ortogonale a π e passante per $(1, -2, -1)$.
(3) Determinare la posizione del punto di coordinate $(1, 0, 0)$ dopo la rotazione di $\pi/2$ attorno ad r in senso antiorario.

Soluzioni:

P1) (1) La matrice associata a T nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo triangolare inferiore, gli autovalori sono gli elementi della diagonale, pertanto 1 è il solo autovalore, con molteplicità algebrica 4. Per determinare l'autospazio associato occorre risolvere il sistema lineare $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava $a = c = 0$. Pertanto $V_1 = \mathsf{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

(2) Da (1) si vede che $m_g(1) = 2 < m_a(1)$, pertanto T non è diagonalizzabile.

(3) Si vede subito che $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Inoltre, se $v \in V_1 \cap V_2$ si ha $v = ae_1 + be_2 = ce_3 + d_4$ per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ma allora $ae_1 + be_2 - ce_3 - de_4 = \underline{0}$ ed essendo $\{e_1, \ldots, e_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$, risulta $a = b = c = d = 0$. Dunque $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ e dalla formula di Grassmann segue che $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$. Inoltre $T(e_1) = e_1 + e_2 \in V_1$ e $T(e_2) = e_2 \in V_1$, dunque $T(e_1), T(e_2)$ sono linearmente indipendenti e stanno in V_1, pertanto $T(V_1) = V_1$. Similmente si verifica che $T(V_2) = V_2$.

(4) Scrivendo la matrice dei coefficienti di $\{v_1, \ldots, v_4\}$ si vede facilmente che il suo rango è 4, dunque $\{v_1, \ldots, v_4\}$ è una base. Si ha

$$\begin{aligned}
&T(v_1) = T(e_1) + T(e_2) = e_1 + 2e_2 = (e_1 + e_2) + (e_2 + e_3) - (e_3 + e_4) + e_4 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 \\
&T(v_2) = T(e_2) + T(e_3) = e_2 + e_3 + e_4 = v_2 + v_4 \\
&T(v_3) = T(e_3) + T(e_4) = e_3 + e_4 + e_4 = v_3 + v_4 \\
&T(v_4) = T(e_4) = e_4 = v_4.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice associata a T nella base $\{v_1, \ldots, v_4\}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

P2) (1) Posti $v_1 = (1, 0, 0) - (0, -1, 1) = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 0, 0) - (0, 0, -1) = (1, 0, 1)$, si ha che $\{v_1, v_2\}$ forma una base dello spazio tangente a π. Dunque l'equazione parametrica di π è data da

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Risolvendo il sistema rispetto a λ, μ si ottiene l'equazione cartesiana di π, data da $x - 2y - z - 1 = 0$.

(2) Lo spazio tangente a r è generato da un vettore ortogonale a v_1, v_2, pertanto poniamo $v_3 = v_1 \wedge v_2 = (1, -2, -1)$. L'equazione parametrica della retta è dunque

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

al variare di $\lambda, \in \mathbb{R}$. Risolvendo in λ, si ottiene l'equazione cartesiana: $x + z = 0, 2x + y = 0$.

(3) Notiamo che v_1 e v_2 sono ortogonali tra loro, e per costruzione sono anche ortogonali a v_3. Pertanto, ponendo $u_1 = v_1/\|v_1\|$, $u_2 = v_2/\|v_2\|$, $u_3 = v_3/\|v_3\|$, risulta $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, che preserva inoltre l'orientazione perchè $\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle = 1$ per costruzione. Notiamo inoltre che $(0, 0, 0) \in r$. Pertanto $\mathcal{R}' := \{O; u_1, u_2, u_3\}$ è un sistema di riferimento affine ortonormale che preserva l'orientazione. Se (x', y', z') indica le coordinate di un punto in tale sistema di riferimento, per costruzione risulta $r : x' = y' = 0$. Troviamo le coordinate di $P := (1, 0, 0)$ nel sistema $\mathcal{R}'$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

la matrice (di cambiamento di base) ottenuta mettendo per colonna i coefficienti di u_1, u_2, u_3. Tale matrice è ortogonale e dunque $A^{-1} = A^t$. Allora

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Da cui risulta che $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ sono le coordinate di P nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$. La rotazione attorno alla retta r in senso antiorario di $\pi/2$ è determinata da $(x', y', z') \mapsto (-y', x', z')$, da cui si ha che le coordinate di P nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ dopo la rotazione attorno a r sono $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Adesso per ottenere le coordinate di P nel sistema di riferimento iniziale dopo la rotazione attorno a r occorre moltiplicare tale vettore per A. Si ottiene pertanto che $(1, 0, 0)$ viene trasformato dalla rotazione attorno a r di $\pi/2$ in senso antiorario nel punto di coordinate $(\frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{6})$.