IV appello 20/9/17 — Geometria per Ingegneria Civile e Ambientale
Prof. F. Bracci — A.A. 2016-17

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3.

(a) Siano $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$. Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti allora sono anche un sistema di generatori.

(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ sono un sistema di generatori di V, allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(c) Se $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $\dim(\text{span}\{v_1, v_2\} \cap \text{span}\{v_3\}) = 0$ allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

(d) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ sono un sistema di generatori, allora per ogni $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, esistono tre elementi di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ che completano v ad una base di V.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile per ogni valore di α, β.

(b) Se $\alpha \neq 0$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ non è diagonalizzabile.

(c) Per $\alpha \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ ha rango 3.

(d) Se $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile allora $A_{\alpha,\beta}\underline{x} = \beta\underline{x}$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $L(v) = w$ allora L è iniettivo.

(b) Se per ogni $w \in V$ esiste $v \in V$ tale che $L(v) = w$ allora $\ker L = \{0\}$.

(c) Se T è suriettivo allora T è iniettivo.

(d) Se $\dim \mathsf{Im}\, T = n$ allora $\ker L = \{0\}$.

Q4) Sia A una matrice simmetrica 4×4.

(a) Se il determinante di A è strettamente negativo allora esistono almeno due autovalori distinti di A.
(b) A ha sempre almeno 2 autovalori distinti.
(c) Il polinomio caratteristico di A può essere $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$.
(d) Se A ha il solo autovalore 1 allora non è diagonalizzabile.

Q5) Siano A, B, C tre matrici quadrate $n \times n$, $n \geq 2$.

(a) Se $\det AB = 0$ e $C = BABA$, allora C non è invertibile.
(b) Se B è invertibile e $A = BCB^{-1}$ allora $\det A = \det C$.
(c) Se B ha rango n, $A = BC$ e $\det A = 0$, allora C non è invertibile.
(d) Se $A - B = C$ e C è invertibile, allora A e B sono invertibili.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = \mu + \lambda, y = 3\mu + 3\lambda, z = -\mu - \lambda$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) S è un piano affine.
(b) S è una retta affine.
(c) Lo spazio tangente ad S è generato dal vettore $(-1, -3, 1)$.
(d) Lo spazio normale ad S è generato dal vettore $(-1, -3, 1)$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(2, 1)$ e $(2, -1)$.

(a) La retta r non interseca la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1.
(b) La retta r è parallela alla retta $y = a$ con $a < 2$.
(c) La distanza di r dal punto $(0, 0)$ è 2.
(d) Sia s la retta $x = -y$. Esiste un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ tale che, in tale sistema di riferimento, r ha equazione $\tilde{y} = 0$ e s ha equazione $\tilde{x} = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $C_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : 4x^2 + y^2 - 4\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) C_α è una iperbole per $\alpha < 0$.
(b) C_α è una ellisse per $\alpha > 0$.
(c) C_α è una parabola per $\alpha = 0$.
(d) Non esistono valori di α per cui C_α è metricamente equivalente ad una circonferenza di raggio 1.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

In $\mathbb{R}^4$ consideriamo il prodotto scalare standard $\langle\ ,\ \rangle$. Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

(1) Provare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e trovare la sua dimensione.
(2) Determinare una base ortonormale di V.
(3) Trovare una base ortonormale dello spazio perpendicolare a V, ovvero $V^\perp$.
(4) Determinare la proiezione ortogonale su V del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluzioni:
Q1) a, d
Q2) b, d
Q3) b, c, d
Q4) a, c
Q5) a, b, c
Q6) b, c
Q7) a, c
Q8) b, d

Parte II
(1) L'insieme V è lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Pertanto per il teorema di Rouché-Capelli, V ha dimensione $4 - 2 = 2$.

(2) Risolvendo il sistema lineare, troviamo che le soluzioni sono della forma $(\lambda, \lambda, \mu, \mu) = \lambda(1, 1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, 1)$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pertanto una base di V è data da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. Poiché i due vettori di tale base sono ortogonali tra loro, basta normalizzarli per ottenere una base ortonormale di V: $\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \}$.

(3) Il sistema (**??**) si può rileggere nel modo seguente:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0, \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\}.$$

In altri termini, se $W = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, la formula precedente dice che $V = W^\perp$. Quindi $W = V^\perp$ e una sua base è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Poiché i due vettori della base sono ortogonali tra loro, basta normalizzarli per ottenere una base ortonormale di $V^\perp$. Ovvero, $\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\}$ è una base ortonormale di $V^\perp$.

(4) La proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ su V è data da

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$