IV appello 15/7/15 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2014-15

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$.

(a) Se $S \subset V$ è un insieme composto da infiniti vettori, allora $S = V$.
(b) Se $S \subset V$ è un insieme che contiene n vettori linearmente indipendenti, allora $\mathrm{span}(S) = V$.
(c) Ogni insieme formato da $m \leq n$ vettori è contenuto in un sottospazio W di V di dimensione m.
(d) Sia W un sottospazio vettoriale di V e siano $v_1, \ldots, v_m \in W$ vettori non nulli, $m < n$. Allora esistono $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ tali che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V.

Q2) Sia $A_{\alpha,\beta}$ la seguente matrice al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Se $\alpha \neq \beta$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(b) Se $\beta = 1$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ ha un unico autovalore di molteplicità geometrica ≤ 3.
(c) Se $\alpha \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile.
(d) Se $\alpha = \beta = 0$ l'autovalore 1 di $A_{\alpha,\beta}$ ha molteplicità geometrica uguale a 3.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se ogni elemento di W ha una preimmagine in V mediante L allora L è iniettiva.
(b) Se dato $v \in V$ risulta $L(v) \in W$ allora L è iniettiva.
(c) Se esistono $v, \tilde{v} \in V$ tali che $L(v) = L(\tilde{v})$, allora $n < m$.
(d) Se per ogni $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $L(v) = w$ allora $n \geq m$.

Q4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti, allora v_3 è ortogonale a v_1 oppure è ortogonale a v_2.

(b) Se la dimensione dello spazio ortogonale a $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è 0, allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

(c) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti, la dimensione dello spazio ortogonale a $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ è 0.

(d) Se $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti, allora v_3 è un multiplo di v_1 oppure è un multiplo di v_2.

Q5) Siano A, B due matrici 4×4.

(a) Se $\det A \neq 0$, allora $\mathrm{rango}(A \cdot B) = \mathrm{rango}(B)$.

(b) Se $\mathrm{rango}(A \cdot B) = \mathrm{rango}(B)$ allora $\det A \neq 0$.

(c) Se A è invertibile, allora $A \cdot B$ oppure $B \cdot A$ sono invertibili.

(d) Se il rango di A e di B è 2 il rango di $A \cdot B$ è 2.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) La retta $x = \lambda + 1, y = \lambda, z = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ è contenuta nel piano $x = 1$.

(b) I punti di coordinate $x = \lambda + \mu, y = \lambda + \mu, z = \lambda + \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ formano un piano.

(c) Ogni piano ortogonale alla retta $x = y, y = 2z$ ha spazio tangente generato dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -2)$.

(d) La retta di equazione parametrica $x = \lambda + 1, y = 2\lambda + 2, z = 0$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, contiene l'origine.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia A una matrice 2×2 ortogonale e sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita tramite $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) T fissa l'origine se e solo se $\det A \neq 0$.

(b) Se $T(1, 0) = (-1, 0)$ allora T non preserva l'orientazione.

(c) T è una isometria.

(d) Se $P \in \mathbb{A}^2$ è un punto tale che $T(P)$ dista 4 dall'origine, allora P dista 4 dall'origine.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : \alpha^2 x^2 + y - 2\alpha x = 0\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha = 0$, l'insieme C_α è una conica degenere.

(b) Per $\alpha = 1$, l'insieme C_α è una conica affinemente equivalente ad una iperbole.

(c) Per nessun valore di α l'insieme C_α è una conica affinemente equivalente ad una ellisse.

(d) Esistono dei valori di α per cui C_α è una conica affinemente equivalente ad una parabola.

Soluzioni:

Q1: b,c
Q2: b
Q3: d
Q4: b,c
Q5: a
Q6: c,d
Q7: c,d
Q8: c,d

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $V = \mathrm{Pol}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale reale formato dai polinomi di grado ≤ 2 con coefficienti reali. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $T_\alpha : V \to V$ definita tramite

$$T_\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x + \alpha x^2.$$

(1) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione T_α è un endomorfismo di V.
(2) Trovare la dimensione del nucleo e dell'immagine di T_0 (cioé T_α per $\alpha = 0$) e determinare una base di $\ker T_0$ e di $\mathsf{Im}\, T_0$.
(3) Determinare gli autovalori e i corrispondenti autospazi di T_0.
(4) Dire, motivando la risposta, se T_0 è diagonalizzabile.

Soluzione:

(1) Denotiamo con $\underline{0}$ il polinomio nullo. Poiché $T_\alpha(\underline{0}) = \alpha x^2$, risulta che per $\alpha \neq 0$ l'applicazione T_α non è lineare. Per $\alpha = 0$ si verifica facilmente che T_0 è lineare. Dunque T_α è un endomorfismo solo per $\alpha = 0$.

(2) Fissiamo la base $\{1, x, x^2\}$ di V. La matrice A associata a T_0 in tale base (in partenza e in arrivo) si ottiene ponendo in colonna i coefficienti di $T(1) = \underline{0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$, $T(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$, e $T(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$. Pertanto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da qui si trova che il rango di A è 2, pertanto $\dim \mathsf{Im}\, T_0 = 2$ e $\dim \ker T_0 = 1$. Inoltre, per quanto appena visto, si ha che $\ker T_0 = \mathrm{span}\{1\}$ e $\mathsf{Im}\, T_0 = \mathrm{span}\{T(x) = 1, T(x^2) = 2x\} = \mathrm{span}\{1, x\}$.

(3) A è una matrice triangolare superiore, dunque gli elementi sulla diagonale principale sono tutti e soli i suoi autovalori (e quindi gli autovalori di T_0). Pertanto, 0 è una autovalore di molteplicità algebrica 3. Sia V_0 l'autospazio relativo all'autovalore 0. Poiché $V_0 = \ker T_0$, ne segue che $V_0 = \mathrm{span}\{1\}$ e pertanto la molteplicità geometrica di 0 è 1.

(4) T_0 non è diagonalizzabile poiche $3 = m_a(0) \neq m_g(0) = 1$.