IV appello 17/7/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Eventuali correzioni devono essere segnalate con un "NO".* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5.

(a) Dati tre vettori $v, w, u \in V$ linearmente indipendenti, esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che av, bw, cu sono linearmente dipendenti.
(b) Ogni insieme di 6 vettori di V genera V.
(c) Ogni insieme di 5 vettori di V linearmente indipendenti genera V.
(d) Se $v, w \in V$ sono linearmente indipendenti, allora esiste una base di V che li contiene.

Q2) Sia A_α la matrice data da:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α non è mai invertibile.
(b) La matrice A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha \neq 0$.
(c) La molteplicità geometrica di 1 è 1 per $\alpha \neq 0$.
(d) Se $\alpha = 0$, la molteplicità algebrica di 1 è 3.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) T è iniettivo se e solo se T è suriettivo.
(b) Il nucleo di T è ridotto al solo vettore nullo se e solo se l'immagine di T coincide con V.
(c) Se T non è suriettivo allora 0 è un autovalore di T.
(d) Se T è diagonalizzabile allora T è invertibile.

Q4) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dotato del prodotto scalare standard e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $v \wedge w \neq 0$ allora v, w sono linearmente dipendenti.
(b) Se $\langle v + u, u\rangle = 0$ allora u, v sono linearmente indipendenti.
(c) Se v, w, u formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ allora $\langle u, v\rangle = 0$, $\langle u, w\rangle = 0$, $\langle v, w\rangle = 0$.
(d) Siano u, v linearmente indipendenti. La proiezione ortogonale di w sullo spazio generato da $u+v$ è pari a 0 se e solo se w è sia ortogonale a u che ortogonale a v.

Q5) Siano A, B, C matrici 4×4.

(a) $\det(A + B^t) = \det A + \det B$
(b) Se $B = C^{-1}$ allora $\det[A \cdot B \cdot C] = \det A$.
(c) Se $\det[A \cdot B \cdot C] = \det A$ allora $B = C^{-1}$.
(d) Se $\det A \cdot \det C \neq 0$ allora il rango di B è pari al rango di $A \cdot B \cdot C$.

Q6) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se L è auto-aggiunto allora L possiede n autovalori distinti.
(b) Se L è auto-aggiunto esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di L.
(c) Se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di L è pari alla dimensione di V allora L è auto-aggiunto.
(d) Se L è auto-aggiunto e ha un solo autovalore 0 allora $L(v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2\alpha x + \alpha(\alpha - 1) = 0\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha < 0$ allora $\mathcal{C}$ è al'insieme vuoto.
(b) Se $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Se $\alpha > 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Se $\alpha = 1$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia π il luogo dei punti di $\mathbb{A}^3$ che soddisfa l'equazione $x - z + 1 = 0$.

(a) π è una retta ortogonale al piano $y = 0$.
(b) π è un piano contenente la retta $x + 1 = 0, z = 0$.
(c) π interseca la retta $x = y = 0$ nel punto $(0, 0, 1)$.
(d) lo spazio ortogonale a π è generato dal vettore $(0, 1, 0)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine $\mathcal{R}$ ortonormale con coordinate affini (x, y). Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) $\mathcal{R}' := \{(0, 1); v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine non ortogonale.
(b) L'angolo tra i vettori v_1, v_2 è $\pi/2$.
(c) Sia P un punto fissato. La distanza tra il punto $P + v_1$ e il punto $P + v_2$ è $2\sqrt{2}$.
(d) La retta $x + y = 0$ ha come spazio tangente lo spazio generato da $\{v_1, v_2\}$.

Q10) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali tali che $U \neq W$.

(a) Se $U + W$ ha dimensione n, allora l'intersezione tra U e W è non vuota.
(b) Se $U \cap W = \{0\}$ allora $U + W = V$.
(c) Se U ha dimensione $n - 2$ e $U + W$ ha dimensione n, allora W ha almeno dimensione 2.
(d) Se $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$ allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e di un vettore di W.

Soluzioni:

Q1) c, d
Q2) a, c
Q3) a, b, c
Q4) c
Q5) b, d
Q6) b, d
Q7) a, c, d
Q8) b, c
Q9) c, d
Q10) c, d

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) Sia $\mathcal{Q} := \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + yz + z - 1 = 0\}$. Classificare in modo affine la quadrica $\mathcal{Q}$ e determinare la sua forma normale metrica.

P2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate (x, y). Sia r la retta passante per $(1, 0)$ e per $(-1, 1)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e parametrica della retta r.
(2) Determinare un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}'$ con origine $(1, 0)_{\mathcal{R}}$ (coordinate nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$) e con coordinate (x', y') in modo che la retta r abbia coordinate $x' = 0$ in tale sistema di riferimento.
(3) Determinare nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$ e in $\mathcal{R}'$ l'equazione parametrica e cartesiana della retta s ortogonale a r e passante per il punto di coordinate $(2, 0)_{\mathcal{R}}$ (coordinate nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$).
(4) Calcolare nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$ la distanza di s dal punto di coordinate $(1, 0)_{\mathcal{R}}$.

Soluzioni:

P1) La matrice A associata alla quadrica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante (ad esempio con Laplace rispetto alla prima colonna) si ottiene $\det A = -1/8 \neq 0$, dunque la quadrica è non-degenere e $\mathsf{rg}\, A = 2$. La matrice associata alla parte quadratica di $\mathcal{Q}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

si vede facilmente che $\mathsf{rg}\, A' = 2$. Dunque la quadrica non è a centro ed è pertanto affinemente equivalente ad un *paraboloide*.

Per trovarne la forma metrica normale, occorre trovare per prima cosa una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A' (tale base esiste per il teorema spettrale reale). Calcolando il polinomio caratteristico di A' si vede che gli autovalori di A' sono 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2. Svolgendo il sistema $A'\underline{x} = \underline{x}$ (ed applicando eventualmente Gram-Schmidt) si ottiene $V(1) = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Mentre $V(0) = \operatorname{span}\{v_3\}$ con $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Notare che v_3 è automaticamente ortogonale a v_1, v_2 come conseguenza del fatto che A' è simmetrica. Si opera quindi il cambiamento di sistema di riferimento ortonormale passando al sistema di riferimento

$\{O; v_1, v_2, v_3\}$ con coordinate (x', y', z'). Le formule di cambiamento sono date da

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

Sostituendo nella equazione di $\mathcal{Q}$ si ottiene $\mathcal{Q} = \{(x', y', z') : (x')^2 + (y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' - 1 = 0\}$. Si trasla poi nella direzione y' in modo da rimuovere il termine lineare in y'. Per fare ciò si deve risolvere il problema $(y' + \alpha)^2 = (y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \beta$ da cui si vede subito che $2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e il cambiamento di coordinate cercato è:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ z'' = z' \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene $\mathcal{Q} = \{(x'', y'', z'') : (x'')^2 + (y'')^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' - \frac{9}{8} = 0\}$. Infine, traslando in z'' si rimuove il termine costante. Per far ciò occorre risolvere l'equazione $-\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma = \frac{9}{8}$, da cui si ricava che il cambimento di coordinate è dato da

$$\begin{cases} \tilde{x} = x'' \\ \tilde{y} = y'' \\ \tilde{z} = z'' + \frac{9}{8}\sqrt{2}. \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene $\mathcal{Q} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : \tilde{z} = \sqrt{2}\tilde{x}^2 + \sqrt{2}\tilde{y}^2\}$ che è la forma normale metrica cercata.

P2) (1) il vettore tangente alla retta r è dato da $v := (1,0)-(-1,1) = (2,-1)$. L'equazione parametrica della retta r è dunque data da

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$. Da tale espressione si ottiene subito che $x + 2y = 1$ è l'equazione cartesiana della retta.

(2) Un vettore normale alla retta r è data da $n := (1, 2)$, che è ortogonale a v. Poniamo $u_1 = \frac{n}{\|n\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ e $u_2 = \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Il sistema di riferimento ortonormale $\{(1, 0); u_1, u_2\}$ è tale che la sua origine appartiene ad r, e che un vettore normale ad r è u_1, pertanto, se $\{x', y'\}$ indicano le coordinate in tale sistema di riferimento, risulta $r : x' = 0$.

(3) La retta s è tangente a n, dunque essa ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$. La sua equazione cartesiana è $x - \frac{y}{2} - 2 = 0$. Per trovare la sua equazione nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$, troviamo le coordinate del punto $(2, 0)$ nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$. Abbiamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 1 \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{-1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

ponendo $x = 2, y = 0$ e risolvendo il sistema si ottiene $x' = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$. La retta s nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ è ortogonale a $x' = 0$, dunque deve essere della forma $y' = c$, dovendo passare per $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ si ha $s : y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$. La sua equazione parametrica è $x' = t, y' = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

(4) Poichè $(1,0)$ è l'origine del sistema di riferimento $\mathcal{R}'$, ne segue che ha coordinate $(0,0)_{\mathcal{R}'}$. La sua distanza dalla retta s è pertanto $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Tale numero è la distanza di s da $(1,0)$ in $\mathcal{R}$ perchè il sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ è ortonormale.