III appello 3/9/14 — Geometria per Ingegneria Energetica, Gestionale, Meccanica
Proff. F. Bracci e E. Ciriza — A.A. 2013-14

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7.

(a) Se W, U sono sottospazi vettoriali di V di dimensione 4, allora $W + U = V$.
(b) Se W è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 5 allora esiste una base $\{w_1, \ldots, w_5\}$ di W e due vettori $v_1, v_2 \in V \setminus W$ tali che $\{w_1, \ldots, w_5, v_1, v_2\}$ sono una base di V.
(c) Ogni insieme di 7 vettori che generano V forma necessariamente una base di V.
(d) Ogni insieme di 7 vettori di V genera V.

Q2) Si consideri la seguente matrice, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice è invertibile per ogni valore di α.
(b) Esistono valori di α, β per cui $A_{\alpha,\beta}$ non è diagonalizzabile.
(c) Se $\alpha \neq \beta$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(d) Per $\alpha\beta = 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali della stessa dimensione $n > 0$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se T è iniettivo allora l'immagine di T coincide con W.
(b) L'immagine di T ha dimensione > 0 se il nucleo di T ha dimensione 0.
(c) Se l'immagine di T ha dimensione $n - 1$, allora l'equazione $T(v) = w$ per $w \in W$ fissato ha una unica soluzione.
(d) L'equazione $T(v) = w$ per $w \in W$ fissato ha sempre almeno una soluzione.

Q4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli.

(a) Se $\{v, w\}$ sono linearmente dipendenti allora $\langle v, w\rangle = 0$.
(b) Se $\{v, w\}$ sono ortogonali tra loro allora sono linearmente dipendenti.
(c) Se span$\{v, w\}$ ha dimensione 2 allora $\langle v, w\rangle = 0$.
(d) Se la proiezione ortogonale di v su w è uguale a v allora $\{v, w\}$ sono linearmente dipendenti.

Q5) Siano A, B, C tre matrici quadrate $n \times n$.

(a) Se il rango di $A \cdot B \cdot C$ è zero allora A oppure B oppure C è la matrice nulla.
(b) Se il rango della matrice A è n e $A \cdot B = C$, allora B e C hanno rango uguale.
(c) Se $A \cdot B$ e C hanno lo stesso rango allora $A \cdot B = C$.
(d) Se $det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$, allora C è invertibile.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta affine passante per $(0, -1, 0)$ e ortogonale al piano π di equazione $x - 2y = 1$.

(a) L'equazione cartesiana della retta r è $2x + y = -1$.
(b) L'equazione parametrica della retta r è $x = \lambda, y = -1 - 2\lambda, z = 0$ per $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) la retta r appartiene ad ogni piano ortogonale a π.
(d) Esiste un solo piano contenente r e parallelo a π

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\{O; e_1, e_2, e_3\}$. Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tre vettori non nulli e siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{A}^3$ tali che $P_1 - O = u, P_2 - O = v, P_3 - O = w$.

(a) Se $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono complanari, allora $\{u, v, w\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\{u, v, w\}$ sono linearmente indipendenti allora $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono complanari.
(c) Se $\langle u \wedge v, w\rangle = 0$ allora esiste un piano che contiene $\{P_1, P_2, P_3\}$.
(d) la distanza di P_1 da P_2 è pari alla lunghezza del vettore $u - v$.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(0, 1)$ e perpendicolare al vettore $(1, -1)$.

(a) r è parallela alla retta $x = y$.
(b) La distanza di r da $(0, 0)$ è 1.
(c) Nessuna retta ortogonale a r contiene il punto $(0, 1)$.
(d) r contiene il punto $(-1, 0)$.

Soluzioni:

Q1: b, c.
Q2: b, c.
Q3: a, b.
Q4: d
Q5: b, d.
Q6: b.
Q7: c, d.
Q8: a, d.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate $\{x, y, z\}$.

(1) Determinare equazione cartesiana e parametrica del piano π contenente la retta $x+y=3, x-2z=0$ e passante per $(2,0,1)$.
(2) Siano $P=(3,0,1)$ e $Q=(5,1,2)$. Determinare equazione cartesiana e parametrica della retta r che contiene P e Q.
(3) Determinare, se esiste, la retta parallela a r contenuta nel piano π.
(4) Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di triangoli i cui vertici sono P, Q e il terzo vertice è vincolato a giacere sul piano π. Determinare tutti i triangoli di area minima della famiglia $\mathcal{T}$.

Soluzione:

(1) I piani contenenti la retta data si ottengono al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (non entrambi nulli) tramite $\alpha(x+y-3)+\beta(x-2z)=0$. Imponendo la condizione $(2,0,1) \in \pi$ si ottiene $-3\alpha=0$, da cui, il piano π è dato da $x-2z=0$ (si poteva subito arrivare a tale conclusione visto che tale piano contiene il punto $(2,0,1)$ e la retta). L'equazione parametrica del piano è $x=2\lambda, y=\mu, z=\lambda$, al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) Sia $v=Q-P=(2,1,1)$. Allora l'equazione parametrica di r è data da $x=3+2\lambda, y=\lambda, z=1+\lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione cartesiana è $x-2y=3, z-y=1$.

(3) Si può ragionare geometricamente come segue: la retta r è contenuta nel piano $x-2z=1$ che è parallelo al piano π, pertanto esiste una unica retta r' contenuta in π parallela ad r. Tale retta è parallela a r (dunque ha lo stesso spazio tangente) e passa per la proiezione ortogonale P' di P su π. Per trovare la proiezione ortogonale di P su π, si considera la retta s ortogonale a π e passante per P, ovvero $x=\lambda+3, y=0, z=-2\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intersezione di tale retta con π è P', e si ottiene imponendo che $x-2z=0$, ovvero $\lambda+3-2(-2\lambda+1)=0$, da cui $P'=(14/5, 0, 7/5)$. Da cui r' è data da $x=14/5+2\lambda, y=\lambda, z=7/5+\lambda$, per $\lambda \in \mathbb{R}$.

(4) Tali triangoli sono tutti e soli quelli il cui terzo vertice è vincolato a stare sulla retta r'. Infatti, preso un qualunque punto R sul piano π, il doppio dell'area del triangolo di vertici P, Q, R si ottiene moltiplicando la lunghezza del lato P, Q (che non dipende da R) per l'altezza del triangolo, che è esattamente la distanza tra il punto R e la retta r. Minimizzare tale area significa quindi trovare i punti di π che hanno minima distanza dalla retta r, e questi sono esattamente i punti della retta r' che è parallela ad r e contenuta in π.