III appello 6/9/17 — Geometria per Ingegneria Civile e Ambientale
Prof. F. Bracci — A.A. 2016-17

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

(a) Siano $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$. Se esiste $v_4 \in V$ tale che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ sono un sistema di generatori di V, allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(c) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ e $\dim(\mathrm{span}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{span}\{v_3, v_4\}) = 1$ allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(d) Dati $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ linearmente indipendenti, allora per ogni $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, esistono tre elementi di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ che completano v ad una base di V.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha\beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile per ogni valore di α, β.

(b) Se $\alpha = \beta = -1$, la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di $A_{\alpha,\beta}$ è 2.

(c) Per $\alpha \cdot \beta \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ ha rango 3.

(d) Se $\alpha = \beta = 1$, allora $A_{\alpha,\beta}$ ha un unico autovalore di molteplicità geometrica 3.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare. Sia $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^5$ il polinomio caratteristico di T.

(a) La dimensione di V è 5 oppure 2.

(b) T è necessariamente diagonalizzabile.

(c) Se T è diagonalizzabile, $\dim \mathrm{Im}\, T = 5$.

(d) Se T è diagonalizzabile, $\dim \ker T = 5$

Q4) Sia A una matrice simmetrica 3×3.

(a) Se la traccia di A è strettamente negativa allora A è invertibile.
(b) A ha 3 autovalori distinti.
(c) Il polinomio caratteristico di A non può essere $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 2)$.
(d) Se il polinomio caratteristico di A è $(1 - \lambda)^3$ allora A è la matrice identica.

Q5) Siano A, B, C tre matrici quadrate $n \times n$, $n \geq 2$.

(a) Se $\det A = 0$ e $A = BC$, allora B non è invertibile oppure C non è invertibile.
(b) Se $A = BC$ e il rango di A è n, allora B e C sono invertibili.
(c) Se B è invertibile, allora $BA(B^{-1})$ è invertibile.
(d) Se $AB = CB$ allora $A = C$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2\mu + \lambda, y = x + \mu, z = y + \lambda + \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) S è un piano affine.
(b) S è una retta affine.
(c) Il punto $(1, 1, 1)$ appartiene ad S.
(d) S è parallelo al piano $2x + 3y + 4z = 0$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

(a) La retta r è ortogonale alla retta $x = -\lambda + 2, y = \lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) La retta r è parallela alla retta $x = 2 - y$.
(c) La distanza di r dal punto $(0, 0)$ è $\sqrt{2}$.
(d) Sia s la retta $x = -y$. Esiste un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ tale che, in tale sistema di riferimento, r ha equazione $\tilde{y} = 0$ e s ha equazione $\tilde{x} = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $C_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0\}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) C_α è una iperbole per $\alpha < 0$.
(b) C_α è una ellisse per $\alpha > 0$.
(c) C_α è una parabola per $\alpha = 0$.
(d) Non esistono valori di α per cui C_α è metricamente equivalente ad una circonferenza di raggio 1.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate $\{x, y, z\}$. Sia r la retta di equazione $x = y, z = 2x - y$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana del piano affine π parallelo alla retta r e passante per i punti $(0, 1, 1)$ e $(-1, 2, 1)$.
(2) Determinare un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate $\{x', y', z'\}$ in cui π abbia equazione $z' = 0$.
(3) Determinare l'equazione cartesiana del piano affine π' parallelo a π e contenente la retta r.
(4) Sia s la retta passante per i punti $(0, 1, 1)$ e $(-1, 2, 1)$. Determinare la distanza tra s e r.

Soluzioni:
Q1) a, b, d
Q2) b, c
Q3) c
Q4) c, d
Q5) a, b,
Q6) a
Q7) a, d
Q8) b

Parte II
(1) La retta r (equazione parametrica data da $x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$) ha spazio tangente generato dal vettore $(1, 1, 1)$. Pertanto il vettore $(1, 1, 1)$ è un generatore dello spazio tangente a π. Poiché i punti $(0, 1, 1)$ e $(-1, 2, 1)$ appartengono a π, ne risulta che il vettore $(0, 1, 1) - (-1, 2, 1) = (1, -1, 0)$ è una altro generatore dello spazio tangente a π. Ne risulta che π ha equazione parametrica $x = \lambda + \mu, y = 1 + \lambda - \mu, z = 1 + \lambda$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dunque l'equazione cartesiana è $x + y - 2z + 1 = 0$.

(2) Affinché π abbia equazione $z' = 0$, occorre scegliere come origine del nuovo sistema di riferimento un qualunque punto di π, ad esempio il punto $P_0 := (0, 1, 1)$, e come base di $\mathbb{R}^3$ una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ formata da vettori tali che lo spazio tangente a π sia generato da v_1, v_2. Pertanto poiché in precedenza abbiamo trovare che $T\pi = \text{span}\{(1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$, e $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$ sono ortogonali tra loro, possiamo prendere $v_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $v_2 := (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Possiamo poi prendere

$$v_3 = v_1 \wedge v_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}).$$

Nel sistema di riferimento affine ortonormale $\{P_0; v_1, v_2, v_3\}$ il piano π ha equazione $z' = 0$.

(3) L'equazione di un generico piano parallelo a π è data da $x + y - 2z + a = 0$, con $a \in \mathbb{R}$. Tra questo piani, il piano π' è determinato dal passaggio per un punto di r (essendo r parallela a π, se un piano parallelo a π contiene un punto di r allora contiene necessariamente tutta la retta r). Pertanto, poiché $(0, 0, 0) \in r$, risulta che π' ha equazione $x + y - 2z = 0$.

(4) Le rette s e r sono sghembe. Per costruzione, s appartiene al piano π mentre r è parallela al piano π e r appartiene al piano π' mentre s è parallela al piano π'. Risulta quindi che la distanza tra r e s è uguale alla distanza tra π e π'. Sia n un vettore di norma 1 ortogonale allo spazio tangente a π. Dati $A \in \pi$ e $B \in \pi'$, la distanza tra π e π' è data dal valore assoluto di $\langle A - B, n\rangle$. Dunque, possiamo

prendere $n = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $A = (-1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 0)$ e risulta

$$\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(\pi, \pi') = |\langle(-1, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})\rangle| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$