III appello 26/6/15 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2014-15

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

(a) Comunque dati $v_1, v_2 \in V$ esistono $v_3, v_4 \in V$ tali che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V.
(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V e $w \in V$ è un vettore non nullo, linearmente dipendente da v_3, allora $\{v_1, v_2, w, v_4\}$ è una base di V.
(c) Se $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente dipendenti allora per ogni $\lambda \neq 0$, $\{\lambda v_1 + v_2, v_2\}$ sono linearmente dipendenti.
(d) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un sistema di generatori di V allora comunque scelti tre vettori tra $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, questi formano una base di V.

Q2) Sia $A_{\alpha,\beta}$ la seguente matrice al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Se $\alpha \neq \beta$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(b) Se $\alpha \cdot \beta \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile.
(c) Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.
(d) Se $\alpha = \beta = 1$ l'autovalore 1 di $A_{\alpha,\beta}$ ha molteplicità geometrica uguale a 4.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se L è iniettivo allora $n \leq m$.
(b) Se $\dim \ker L > 0$ allora $n \leq m$.
(c) Se $m < n$ allora L non può essere iniettivo.
(d) Se L è suriettivo e $n > m$ allora L è iniettivo solo se $\ker L$ ha dimensione $n - m$.

Q4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 3 e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono ortogonali tra loro a due a due, allora formano una base di V.
(b) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti allora esiste una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di V tale che $v_j \in \operatorname{span}\langle u_j\rangle$ per $j = 1, 2, 3$.
(c) Se $\langle v_1, v_3\rangle = 0$ e $\langle v_2, v_3\rangle = 0$ allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base di V.
(d) Se $\langle \lambda v_1 + v_2, v_3\rangle = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$ sono ortogonali.

Q5) Sia A una matrice 4×2.

(a) Se A ha rango 2, allora per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ esiste $x \in \mathbb{R}^4$ tale che $A^t x = v$.
(b) Se il rango di A è massimo, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$ esiste $x \in \mathbb{R}^2$ tale che il sistema $Ax = v$ ammette una soluzione.
(c) Se il rango di A è massimo, A è diagonalizzabile.
(d) Il rango di A è 2 se e solo se esistono $x, y \in \mathbb{R}^2$ tali che Ax e Ay sono linearmente indipendenti.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) La retta ortogonale al piano $x - y + 2z = 1$ e passante per $(0, 0, 0)$ ha equazione cartesiana $x + y = 0, z - x + y = 1$.
(b) I punti di coordinate $x = 0, y = \lambda + \mu, z = 0$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ appartengono ad una retta.
(c) Date due rette r, s ortogonali, esiste un unico piano che le contiene entrambe.
(d) Il piano $x = \lambda, y = \mu, z = 0$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ è parallelo al piano $z = 1200$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una isometria.

(a) Se A è un triangolo rettangolo, allora $T(A)$ è un triangolo rettangolo.
(b) Sia r una retta che contiene $(0, 0)$. Allora $T(r)$ è una retta che contiene $(0, 0)$.
(c) Se $P \in \mathbb{A}^2$ ha distanza 1 da $(0, 0)$, allora $T(P)$ ha distanza 1 da $(0, 0)$.
(d) Siano $r : x + y = 0$ e $s : x - y = 0$. Se $T(0, 0) = (0, 0)$ e $T(r)$ ha equazione $x = 0$, allora $T(s)$ ha equazione $y = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : x^2 + \beta y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 + \beta - 2\alpha = 0$ una famiglia di coniche al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha = 0, \beta > 0$ la conica è affinemente equivalente ad una parabola.
(b) Per $\alpha = 1$, $\beta = -3\sqrt{13}$ la conica è affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Per $\alpha = 17$, $\beta > 0$ la conica è affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Esistono dei valori di α, β per cui la conica è affinemente equivalente ad una parabola.

Soluzioni:

Q1: b,c.
Q2: a, b.
Q3: a,c.
Q4: a,d.
Q5: a, d.
Q6: b,d.
Q7: a,d.
Q8: b,c.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ siano fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate (x, y). Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$4xy + 4x - 6y + 1 = 0.$$

(1) Si classifichi in modo affine tale conica.
(2) Si determini la forma normale metrica di tale conica.

Soluzione:

Sia A la matrice 3×3 associata a $\mathcal{C}$, data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

e sia A' la matrice associata alla parte quadratica:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = -28 \neq 0$, dunque la conica è non degenere, e $\det A' = -4$, da cui si evince che $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.

Per determinare la forma normale metrica di $\mathcal{C}$, si calcolano prima gli autovalori di A'. Essi sono $-2, 2$. Risolvendo il sistema $Ax = -2x$, $x \in \mathbb{R}^2$, si trova che l'autospazio relativo all'autovalore -2 è generato dal vettore

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

mentre l'autospazio relativo all'autovalore 2 è generato dal vettore

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Sia C la matrice le cui colonne sono date da v_1, v_2, ovvero

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Operiamo un cambiamento ortonormale di coordinate prendendo come nuovo sistema di riferimento affine $\{O; v_1, v_2\}$. Risulta dunque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. In tali coordinate, la conica $\mathcal{C}$ ha equazione

$$2(x')^2 - 2(y')^2 - \sqrt{2}x' - 5\sqrt{2}y' + 1 = 0,$$

ovvero

$$(\sqrt{2}x' - \frac{1}{2})^2 - (\sqrt{2}y' + \frac{5}{2})^2 + 7 = 0.$$

Si opera dunque la traslazione data da $\tilde{x} = x' + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \tilde{y} = y' + \frac{5}{2\sqrt{2}}$ e si ottiene che, nel nuovo sistema di riferimento ortonormale, la conica ha equazione

$$2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 + 7 = 0,$$

che risulta essere la forma normale cercata.