**II appello 22/7/14 — Geometria per Ingegneria Energetica, Gestionale, Meccanica**
**Proff. F. Bracci e E. Ciriza — A.A. 2013-14**

**Nome e Cognome (in stampatello e leggibile):** ________________________________

---

**PARTE I:** Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

---

**Q1)** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 5.

(a) Se $W, U$ sono sottospazi vettoriali di $V$ di dimensione 3, allora $W + U$ è un sottospazio vettoriale di $V$ di dimensione 6.
(b) Se $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$ di dimensione 5 allora $V = W$.
(c) Dato un insieme $\mathcal{B}$ di 5 vettori linearmente indipendenti di $V$ e un vettore $v$ non nullo, esistono 4 vettori di $\mathcal{B}$ tali che l'insieme formato da tali vettori unito il vettore $v$ è una base di $V$.
(d) Ogni insieme di 6 vettori di $V$ genera $V$.

---

**Q2)** Si consideri la seguente matrice, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Per $\alpha = 1$ e per ogni $\beta$, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ non ha autovalori reali.
(b) Esistono valori di $\alpha, \beta$ per cui $A_{\alpha,\beta}$ non è diagonalizzabile.
(c) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è sempre diagonalizzabile.
(d) Per $\alpha \neq \beta^2$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è sempre invertibile.

---

**Q3)** Siano $V, W$ due spazi vettoriali della stessa dimensione $n$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se $T$ è suriettivo allora la dimensione del nucleo di $T$ può assumere ogni valore da 0 a $n - 1$.
(b) L'immagine di $T$ ha dimensione $> 0$ se e solo se il nucleo di $T$ non coincide con $V$.
(c) Se comunque dato $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $T(v) = w$, allora tale $v$ è unico.
(d) Se, dati $v_0, v_1 \in V$, $T(v_0) = T(v_1)$ implica $v_0 = v_1$, allora esiste $w \in W$ tale che il sistema $T(v) = w$ per $v \in V$ non ammette soluzione.

---

**Q4)** Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione $n$ e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli.

(a) $\{v, w\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\langle v, w\rangle = 0$.
(b) Se $\{v, w\}$ sono ortogonali tra loro e di norma 1 allora $\{v, w\}$ si può completare ad una base ortonormale di $V$.
(c) $\{v, w\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se lo spazio ortogonale a $\text{span}\{v, w\}$ ha dimensione $n - 2$.
(d) La proiezione ortogonale di $w$ su $v$ è il vettore nullo se e solo se $\langle v, w\rangle = 0$.

---

**Q5)** Siano $1 \leq n < m$. Sia $A$ una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia $A'$ la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna $b$ alla matrice $A$.

(a) Se esiste un minore $n \times n$ di $A$ con determinante non nullo, allora il rango di $A'$ è strettamente maggiore del rango di $A$.
(b) Se il rango della matrice $A$ è $n$, il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Se il rango di $A$ è $n$ allora il rango di $A'$ è $n$ se e solo se il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(d) Se $A$ ha un minore $n \times n$ con determinante diverso da zero, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette almeno una soluzione.

---

**Q6)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini $(x, y, z)$. Sia $\pi$ il piano passante per $(1, 1, 1)$ e ortogonale alla retta $r$ di equazione $x - y + z = 1, 2x - y + z = 0$.

(a) L'equazione cartesiana del piano $\pi$ è $x = 0, y + z = 2$.
(b) L'equazione parametrica del piano $\pi$ è $x = \lambda, y = \mu, z = 2 - \mu$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(c) Il piano $\pi$ interseca ogni retta parallela alla retta $r$.
(d) Esiste un solo piano contenente $r$ e parallelo a $\pi$

---

**Q7)** Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle u \wedge v, w\rangle = 0$ allora $\{u, v, w\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Se lo spazio generato da $\{u, u \wedge v, u \wedge w\}$ ha dimensione 3 allora $\{u, v, w\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(c) Se $\{u, v, w\}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, allora $\langle u, v \wedge w\rangle = \pm 1$.
(d) Se $\text{span}\{u, v\}$ ha dimensione 2, allora $\{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se la proiezione ortogonale di $w$ lungo $u \wedge v$ non è nulla.

---

**Q8)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini $(x, y)$. Sia $r$ la retta passante per $(1, 1)$ e perpendicolare al vettore $(1, 0)$.

(a) La distanza di $r$ da $(0, 0)$ è 1.
(b) l'equazione cartesiana di $r$ è $x = 1, y = 0$.
(c) Ogni retta ortogonale a $r$ è parallela alla retta $x = 0$.
(d) $r$ contiene il punto $(0, 0)$.

**Soluzioni:**

**Q1**: b, c.
**Q2**: c, d.
**Q3**: b, c.
**Q4**: b, c, d.
**Q5**: c.
**Q6**: b, c.
**Q7**: b, c, d.
**Q8**: a.

**PARTE II:** Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

---

Su $\mathbb{R}^2$ sia definito il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dato da
$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = 2xx' + x'y + xy' + yy'.$$
Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita tramite
$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
(2) Determinare la dimensione dell'immagine di $T$ e del nucleo di $T$ e trovarne delle basi.
(3) Determinare autovalori e autovettori di $T$ e dire se $T$ è diagonalizzabile.
(4) Determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^2$ tale che $W + \ker T = \mathbb{R}^2$ e che $W$ sia ortogonale a $\ker T$.
(5) Determinare la matrice associata a $T$ nella base di $\mathbb{R}^2$ determinata da $\{(1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$.

**Soluzione:**

(1) Rispetto al prodotto scalare dato, la base canonica $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ non è ortogonale, infatti $\langle e_1, e_2\rangle = 1$, inoltre il vettore $e_1$ ha norma $\sqrt{2}$.
Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori della base canonica, il vettore
$$v = e_2 - \frac{\langle e_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1$$
risulta ortogonale a $e_1$. La norma di $v = e_2 - 1/2e_1 = (-1/2, 1)$ è $1/\sqrt{2}$.
Ponendo $u_1 = 1/\sqrt{2}e_1$ e $u_2 = \sqrt{2}v$ si ottiene una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare dato. Quindi la base cercata è
$$\mathcal{V} = \{u_1 = (1/\sqrt{2}, 0),\ u_2 = (-1/\sqrt{2}, \sqrt{2})\}.$$

(2) Il prodotto scalare tra un vettore generico $v = (x, y)$ e il vettore $(1, -1)$ è uguale a $x$, per cui $T(x, y) = (x, 0) = xe_1$ e pertanto l'immagine di $T$ è generata dal vettore $e_1$. Quindi $\{e_1\}$ è una base dell'immagine di $T$ che di conseguenza ha dimensione 1 .
Dal teorema della dimensione ne segue che il nucleo ha dimensione 1. Calcolando direttamente si ha che $T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0$, quindi $\{e_2\}$ è una base del nucleo di $T$.

(3) Dai punti precedenti segue che $0, 1$ sono autovalori e che gli autospazi associati coincidono rispettivamente con il nucleo di $T$ e con l'immagine di $T$. Dunque la molteplicità geometrica di 0 e 1 è pari ad 1, la somma è 2, pari alla dimensione dello spazio, e $T$ è pertanto diagonalizzabile.

(4) Il sottospazio ortogonale al nucleo è $W = (\ker T)^\perp = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle v, e_2\rangle = 0\}$, il prodotto scalare tra $v$ e $e_2$ è $\langle v, e_2\rangle = x + y$. Si ha quindi che
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

(5) Si denoti con $w_1$ il primo vettore e con $w_2$ il secondo. L'immagine del primo vettore della base è $T(w_1) = w_1 = 1w_1 + 0w_2$ , l'immagine del secondo vettore è $T(w_2) = (-1/\sqrt{2}, 0) = -1w_1 + 0w_2$.
Quindi la matrice di $T$ in questa base è
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$