II appello 14/7/17 — Geometria per Ingegneria Civile e Ambientale
Prof. F. Bracci — A.A. 2016-17

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ sono linearmente indipendenti allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V.
(b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono un sistema di generatori di V, allora esistono tre vettori di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente indipendenti.
(c) Se $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $v_3 \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.
(d) Dati $v_1, v_2, v_3 \in V$, allora per ogni $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, esistono due elementi di $\{v_1, v_2, v_3\}$ che completano v ad una base di V.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile per ogni valore di α, β.
(b) Se $\alpha = \beta \neq 0$, $A_{\alpha,\beta}$ ha un solo autovalore di molteplicità geometrica 1.
(c) Per $\alpha \cdot \beta \neq 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ ha rango 3.
(d) Se $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile allora $A_{\alpha,\beta}$ è diagonalizzabile.

Q3) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che esiste $v \in V$ con $T(v) \neq \underline{0}$. Sia $p(\lambda) = -\lambda^3$ il polinomio caratteristico di T.

(a) La dimensione di V è 3.
(b) T non è autoaggiunto.
(c) T non è invertibile.
(d) La dimensione del nucleo di T è 3.

Q4) Sia A una matrice simmetrica 2×2.

(a) Se la traccia di A è strettamente positiva allora A è invertibile.
(b) A può avere due autovalori non reali (e quindi complessi coniugati).
(c) Il polinomio caratteristico di A non può essere $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$.
(d) Se $\det A = 0$ e la traccia di A è nulla allora A è la matrice nulla.

Q5) Siano $1 \leq m < n$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se i vettori colonna di A' sono linearmente indipendenti, esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Se i vettori riga di A sono linearmente indipendenti, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione.
(c) Se A ha un minore $m \times m$ con determinante non nullo, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione.
(d) Se il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette soluzione, allora il rango di A è m.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 1, y = 0, z = \lambda + \mu$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) S è un piano affine.
(b) S è una retta affine.
(c) Il punto $(1, 0, 1)$ appartiene ad S.
(d) S è ortogonale al piano $y = 0$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è 1.
(b) La retta r è ortogonale alla retta $x = y$.
(c) Siano A, B due punti distinti di r e sia $C_\mu = (\mu, -\mu)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$. L'area del triangolo di vertici A, B, C_μ dipende da μ.
(d) Sia s la retta $x = 0$. Esiste un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ tale che, in tale sistema di riferimento, r ha equazione $\tilde{y} = 0$ e s ha equazione $\tilde{x} = 0$.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia $P = (1, 0, 0)$ e siano $v_1 = (1, 1, -2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$. Sia $\mathcal{R} = \{P; v_1, v_2, v_3\}$ il sistema di riferimento affine con coordinate (x', y', z').

(a) Il piano $2x + 2y - 4z = 2$ ha equazione $x' = 0$ in $\mathcal{R}$.
(b) Il piano $x = 0$ ha equazione $x' + z' + 1 = 0$ in $\mathcal{R}$.
(c) Il piano $x = 0$ e il piano $y = 0$ restano ortogonali (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathcal{R}^3$) nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.
(d) La retta $x = \lambda + 1, y = \lambda, z = -2\lambda$ ha equazione $y' = z' = 0$ in $\mathcal{R}$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nel piano affine sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia

$$\mathcal{C}_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : \alpha x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0\}.$$

(1) Classificare in modo affine la conica $\mathcal{C}_\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) Per $\alpha = 4$ determinare la forma normale metrica di $\mathcal{C}_\alpha$ e il cambio di sistema di riferimento affine ortonormale che occorre per trasformare la conica nella sua forma normale.

Soluzioni:
Q1) a, b
Q2) b, c
Q3) a, b, c
Q4) c, d
Q5) b, c
Q6) b, c
Q7) b
Q8) b

Parte II
(1) Denotiamo con A la matrice associata alla conica $\mathcal{C}_\alpha$, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = -7$, la conica è non degenere per ogni valore di α.
Sia $\tilde{A}$ la matrice associata alla parte quadratica di $\mathcal{C}_\alpha$, ovvero

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta $\det \tilde{A} = \alpha - 4$. Pertanto, per $\alpha < 4$, $\tilde{A}$ ha due autovalori di segno discorde e la conica $\mathcal{C}_\alpha$ è affinemente equivalente ad una iperbole. Per $\alpha = 4$, $\det \tilde{A} = 0$, pertanto $\mathcal{C}_4$ è affinemente equivalente ad una parabola. Per $\alpha > 0$, $\det \tilde{A} > 0$, essendo la traccia di $\tilde{A}$ pari a $\alpha + 1$, si ha che $\mathrm{tr}(\tilde{A}) > 0$ per $\alpha > 0$, dunque, essendo $\det A < 0$, per $\alpha > 4$, la conica $\mathcal{C}_\alpha$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(2) Poniamo $\alpha = 4$. Essendo $\det \tilde{A} = 0$, risulta che 0 è un autovalore di $\tilde{A}$, il corrispondente autospazio è generato dal vettore $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$. Poichè la traccia di $\tilde{A}$ è la somma degli autovalori e per $\alpha = 4$ si ha $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = 5$, ne segue che l'altro autovalore di A è 5. Essendo gli autospazi di una matrice simmetrica ortogonali tra loro, risulta che il vettore $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ genera l'autospazio relativo all'autovalore 5. Poniamo allora

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{-2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Con questo cambiamento ortonormale di sistema di riferimento, si ha

$$\mathcal{C}_4 = \{(x', y') : 5y'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}y' - \frac{10}{\sqrt{5}}x' + 1 = 0\}.$$

Essendo $5y'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}y' - \frac{10}{\sqrt{5}}x' + 1 = 5(y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x'$, operando la traslazione

$$\begin{cases} x' &= \tilde{x} \\ y' &= \tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

la conica $\mathcal{C}_4$ diventa $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} = \frac{5}{2}\tilde{y}^2\}$, che è la forma normale metrica della parabola. Il cambiamento di sistema di riferimento ortonormale che porta $\mathcal{C}_4$ in tale forma normale è pertanto dato da

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y} + \frac{2}{5}, \\ y &= \frac{-2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y} + \frac{1}{5}. \end{cases}$$