II appello 9/7/18 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Siano v_1, v_2, v_3, v_4 vettori non nulli di uno spazio vettoriale V.

(a) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti, la dimensione di V è 4.

(b) Se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \underline{0}$ per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(c) Se $\dim \operatorname{span}\{v_1 - v_2, v_2, v_3 - v_2, v_4 - v_2\} = 4$ allora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indipendenti.

(d) Se $\dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 3$ allora, comunque presi tre vettori di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, questi sono linearmente indipendenti.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 145 & 0 \\ 34\pi & \frac{112}{\sqrt{4509}} & 9999 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per ogni valore di α, β.

(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è 2 per $\alpha = \beta = 0$.

(c) Per $\beta \neq 0$ la matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non è diagonalizzabile.

(d) Gli autovalori di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non dipendono da α, β.

Q3) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ dotato di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se per ogni $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $T(v) = w$ allora T è suriettivo.

(b) Se T è auto-aggiunto e ha il solo autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $T(v) = \lambda v$ per ogni $v \in V$.

(c) Se esistono due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V tali che la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sia diagonale, allora T è auto-aggiunto.

(d) Se T è un isomorfismo allora per ogni $v, w \in V \setminus \{\underline{0}\}$ vale $\langle T(v), w\rangle \neq 0$.

Q4) Sia A una matrice 3×3 non nulla con entrate reali.

(a) Se esiste un minore 2×2 di A con determinante $\neq 0$, allora A ha rango almeno 2.
(b) Se la traccia di A è 0 allora A non è invertibile.
(c) Se il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = -\lambda^3$ allora A non è simmetrica.
(d) Se $\det A = 0$ e A è simmetrica, allora l'unico autovalore di A è 0.

Q5) Sia $n > 1$. Sia A una matrice $n \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^n$. Sia A' la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se il sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una unica soluzione, allora esistono soluzioni al sistema $Ax = b$.
(b) Se il rango della matrice A' è uguale a n, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Se il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una unica soluzione allora $Ax = c$ ammette una unica soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}^n$.
(d) Se il rango di A è minore di n, il sistema $Ax = b$ non ammette soluzione.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 1, y = \lambda + \mu, z = 0$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S è un piano affine di equazione $y = 0$.
(b) lo spazio tangente TS è generato dal vettore $(0, -\sqrt{2}, 0)$.
(c) S è parallelo alla retta $x = z = 3$.
(d) S è contenuto nel piano $x - 4z = 1$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta il cui spazio ortogonale è generato da $(\pi, -\pi)$ e passante per l'origine.

(a) L'equazione cartesiana di r è $x - y = 0$.
(b) La distanza di r dal punto $(-1, 1)$ è $\sqrt{2}$.
(c) r è parallela alla retta $x + y = 1$.
(d) Se $\mathcal{R} := \{O; v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate (x', y'), per cui O ha coordinate $x' = 0, y' = 0$ e per cui la retta $x = \lambda, y = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ha equazione cartesiana $x' = 0$, allora r è data da $y' = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha : x^2 + \alpha y^2 - 4x - 2\alpha y + \alpha + 3 = 0$ una famiglia di insiemi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha > 0$, C_α è una ellisse.
(b) Per $\alpha = 0$, $\mathcal{C}_\alpha$ è una parabola.
(c) Esistono valori di α per cui $\mathcal{C}_\alpha$ è metricamente equivalente ad una circonferenza.
(d) Per $\alpha < 0$, C_α è degenere.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Sia $\mathrm{Pol}_{\leq 2}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 in t con coeffiecienti reali. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Pol}_{\leq 2}[t]$ definita da

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = at + (b-c)t^2.$$

(1) Trovare la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, dove $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \left\{1+t, 1+t^2, t^2\right\}$ è una base di $\mathrm{Pol}_{\leq 2}[t]$.
(2) Determinare una base di $\ker T$ e di $\mathsf{Im}\, T$.
(3) Trovare una base ortonormale di $(\ker T)^{\perp}$.
(4) Trovare la proiezione ortogonale di un generico vettore di $\mathbb{R}^3$ su $(\ker T)^{\perp}$.

Soluzioni:
Q1) c
Q2) b, c
Q3) b
Q4) a, c
Q5) a, c
Q6) b, c, d
Q7) a, b, d
Q8) a, c

Parte II
(1) Risulta

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t = (1+t) - (1+t^2) + t^2, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t - t^2 = (1+t) - (1+t^2).$$

Pertanto la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) La matrice A ha rango 2, pertanto $\mathsf{Im}\, T$ ha dimensione 2. Come visto in precedenza, $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, pertanto, $\ker T = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$. L'immagine degli altri due elementi della base $\mathcal{B}$ tramite T formano una base di $\mathsf{Im}\, T$, ovvero, $\mathsf{Im}\, T = \mathrm{span}\{t, t-t^2\}$.

(3) Si vede subito che una tale base è data da $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\}$, essendo questi due vettori ortonormali e ortogonali alla base di $\ker T$ trovata in precedenza.

(4) Utilizzando la base ortonormale trovata in (3), si ottiene che la proiezione di (x, y, z) su $(\ker T)^{\perp}$ è data da

$$\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\\frac{y-z}{2}\\\frac{-y+z}{2}\end{pmatrix}$$