II appello 19/2/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5.

(a) Dati due vettori $v, w \in V$ linearmente indipendenti, allora $\{v, w, v+w\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Ogni base di V è composta da 5 vettori linearmente indipendenti.
(c) Se 5 vettori generano V allora sono a linearmente indipendenti.
(d) Dato $v \in V$, esiste una unica base di V che contiene v.

Q2) Sia A_α la matrice data da:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α è sempre invertibile.
(b) La matrice A_α è diagonalizzabile solo per $\alpha = 0$.
(c) Gli autovalori di A_α dipendono da α.
(d) La molteplicità geometrica di -1 è 1 per $\alpha \neq 0$ ed è 2 per $\alpha = 0$.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) T è invertibile se e solo se il nucleo di T ha dimensione 0.
(b) Il nucleo di T e l'immagine di T hanno sempre intersezione ridotta al solo vettore nullo.
(c) Se gli autovalori di T sono tutti diversi da zero allora T è suriettivo.
(d) La dimensione dell'immagine di T è sempre maggiore alla dimensione del nucleo di T.

Q4) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dotato del prodotto scalare standard e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $v \wedge w = 0$ allora v, w sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\langle v \wedge w, u \rangle = 0$ allora u, v, w sono linearmente dipendenti.
(c) Se v, w, u formano una base di $\mathbb{R}^3$ allora $\langle u \wedge v, w \rangle \neq 0$.
(d) La proiezione ortogonale di w sullo spazio generato da $u \wedge v$ è data da $\langle u, v \rangle w$.

Q5) Siano A, B, C matrici 3×3.

(a) $\det(A + B) = \det A + \det B$
(b) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det C \cdot \det B \cdot \det A$.
(c) Se $A \cdot B$ è invertibile allora A e B sono invertibili.
(d) Se il rango di A, B, C è 3, allora il rango di $A(B + C)$ è 3.

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se L è diagonalizzabile allora L ha n autovalori distinti.
(b) Se L è auto-aggiunto allora L è diagonalizzabile.
(c) Se L è diagonalizzabile allora L è auto-aggiunto.
(d) Se L ha un solo autovalore allora L è un multiplo dell'identità.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : x^2 + \alpha y^2 - 2x + 2 = 0\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha < 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(b) Se $\alpha = 7$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Se $\alpha > 0$ allora $\mathcal{C}$ è l'insieme vuoto.
(d) Se $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è una retta affine.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta ortogonale al piano $2x - y = 1$ e passante per $(0, -1, 0)$.

(a) r è parallela al piano $-x + 2y = 0$.
(b) r è ortogonale alla retta $z = 0, -x + 2y + z = 1$.
(c) r interseca il piano $2x - y = 1$ nel punto $(0, -1, 0)$.
(d) lo spazio tangente ad r è generato dal vettore $(2, -1, 0)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine $\mathcal{R}$ ortonormale con coordinate affini (x, y). Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia $P = (1, 0)$. Si consideri il sistema di riferimento affine $\mathcal{R}' := \{P; v_1, v_2\}$, con coordinate (x', y').

(a) Le equazioni di cambiamento di coordinate sono $x' = x + y + 1$, $y' = -x + 2y$.
(b) l'equazione cartesiana della retta $x = 0$ nel sistema di riferimento $\mathcal{R}'$ è $x' = -y' - 1$.
(c) Il sistema di riferimento affine $\mathcal{R}'$ è ortonormale.
(d) L'angolo formato da v_1 e v_2 è $\pi/2$.

Q10) Sia V uno spazio vettoriale metrico di dimensione 5 e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali, con $\dim U = \dim W = 2$ tali che $U \neq W$.

(a) $\dim(U \cap W) \leq 1$.
(b) $\dim(U + W) = 4$.
(c) Ogni base di $U + W$ ha almeno 3 vettori.
(d) Se $U \cup W$ contiene 4 vettori linearmente indipendenti, allora $\dim(U \cap W) = 0$.

Soluzioni:

Q1) b, c
Q2) a, b
Q3) a,c
Q4) b, c
Q5) b,c
Q6) b
Q7) a,c
Q8) c,d
Q9) b
Q10) a, c, d

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita tramite $L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $L(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $L(v_3) = L(v_1) + 2L(v_2)$.

(1) Provare che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
(2) Determinare la matrice associata ad L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.
(3) Determinare la dimensione dell'immagine di L e trovarne una base.
(4) Determinare la dimensione del nucleo di L e trovarne una base.
(5) Determinare l'aggiunta di L rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

P2) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate (x, y).

(1) Determinare la classficazione affine della conica $x^2 + \alpha y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) Per $\alpha = 1$, trovare i cambiamenti ortonormali di sistema di riferimento che trasformano la conica nella sua forma metrica normale.

Soluzioni:

P1)

(1) La matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0, dunque le sue righe sono linearmente indipendenti e ciò prova che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti e dunque formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) Sia $\mathcal{V} := \{v_1, v_2, v_3\}$, e denotiamo con $\mathcal{E}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathcal{E}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{V}, \mathcal{E}_2$ è data da

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

dove si è tenuto conto che $L(v_3) = L(v_1) + 2L(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ora, C è la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{V}$ alla base $\mathcal{E}_3$ e dunque,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{E}_3$ alla base $\mathcal{V}$. Pertanto la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ è data da $A := B \cdot C^{-1}$, ovvero

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

[Alternativamente, se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$, si può esprimere e_1, e_2, e_3 in funzione di v_1, v_2, v_3 e determinare la loro immagine tramite L. Per esempio, poiché $e_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$, si poteva calcolare

$$L(e_1) = L(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3) = \frac{1}{2}L(v_1) + \frac{1}{2}L(v_2) - \frac{1}{2}L(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ottenendo la prima colonna della matrice cercata, e similmente per $L(e_2), L(e_3)$.]

(3) Per calcolare nucleo e immagine di L si può utilizzare sia la matrice A che la matrice B. Usiamo la matrice A. Il rango di tale matrice è 1, da cui segue che la dimensione dell'immagine di L è 1. Una base è dunque data da una qualunque colonna della matrice A, ad esempio $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Poiché l'immagine di L ha dimensione 1, dal teorema della dimensione segue che il nucleo di L ha dimensione $3 - 1 = 2$. Una base si ottiene risolvendo il sistema $A \cdot \underline{x} = 0$, ovvero

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che ad esempio una base del nucleo è data dai vettori $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) Poichè A è la matrice associata a L nelle basi ortonormali $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, l'aggiunta di L, $L^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ha matrice associata A^t nelle basi $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, e dunque

$$L^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y \\ -2x + 2y \\ 4x - 4y \end{pmatrix}.$$

P2) (1) Le matrici A e A' associate alla conica sono

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = -1$, dunque la conica è non-degenere per ogni valore di α e rango di A è sempre pari a 3. Invece $\det A' = \alpha - 1$, dunque il rango di A' è 1 per $\alpha = 1$ e 2 per $\alpha \neq 1$.

Nel caso $\alpha = 1$ si ha pertanto che la conica è affinemente equivalente ad una parabola.

Nel caso $\alpha \neq 1$, si studia la segnatura di A'. Il polinomio caratteristico di A' è $p_{A'}(t) = t^2 - (1 + \alpha)t + (\alpha - 1)$. Guardando la variazione di segno nei coefficienti non nulli di $p_{A'}(t)$ al variare di α e utilizzando il teorema di Cartesio si vede facilmente che la segnatura di A' è $(2, 0)$ per $\alpha > 1$ e $(1, 1)$ per $\alpha < 1$.

Pertanto, nel caso $\alpha < 1$ la conica è affinemente equivalente ad una iperbole.

Per il caso $\alpha > 1$ si hanno due possibilità: la conica non ha punti reali ed è l'insieme vuoto, oppure la conica è affinemente equivalente ad una ellisse. Per vedere quale caso occorra, si studia la segnatura di A per $\alpha > 1$. Si calcola il polinomio caratteristico di A e si trova $p_A(t) = -t^3 + (\alpha + 2)t^2 - 2\alpha t + (\alpha - 1)$ e utilizzando Cartesio si vede che la segnatura di A è $(3, 0)$ nel caso $\alpha > 1$. Pertanto, in tal caso, la conica è l'insieme vuoto.

(2) Utilizzando il calcolo di $p_{A'}(t)$ fatto in precedenza, si vede subito che per $\alpha = 1$ gli autovalori di A' sono $2, 0$. Calcoliamo l'autospazio corrispondenti all'autovalore 2. Si deve risolvere il sistema $A' \cdot \underline{x} = 2\underline{x}$. Con un semplice calcolo si vede che lo spazio delle soluzioni è generato dal vettore $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Poichè A'

è simmetrica, i suoi autospazi sono ortogonali tra loro, e dunque un autovettore di norma uno relativo all'autovalore 0 è $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Facendo il cambiamento ortonormale di coordinate

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} \end{cases}$$

si ottiene che la conica è metricamente equivalente alla conica $2\tilde{x}^2 - \sqrt{2}\tilde{x} - \sqrt{2}\tilde{y} + 1 = 0$. Quest'ultima espressione si può riscrivere come $2(\tilde{x} - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 - \sqrt{2}\tilde{y} + \frac{7}{8} = 0$. Dunque, facendo la traslazione

$$\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \frac{7}{8\sqrt{2}}, \end{cases}$$

si ottiene che la conica è metricamente equivalente a $2\hat{x}^2 - \sqrt{2}\hat{y} = 0$, ovvero $\hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}^2$.