I appello 8/7/14 — Geometria per Ingegneria Energetica, Gestionale, Meccanica
Proff. F. Bracci e E. Ciriza — A.A. 2013-14

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ______________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2.

(a) Se $\{v_1, v_2\}$ è una base di V e $v = v_1 - v_2$, allora $\{v, v_2\}$ è una base di V.
(b) Dato un qualunque insieme contenente 3 vettori di V, se ne può sempre estrarre una base.
(c) Se $\{v_1, v_2\}$ sono un insieme di generatori di V, allora $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti.
(d) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un sistema di generatori di V, allora esiste $v \in V$ tale che $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ sono linearmente indipendenti.

Q2) Si consideri la seguente matrice, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è sempre invertibile.
(b) Gli autovalori di $A_{\alpha,\beta}$ sono $\alpha, 1$.
(c) La matrice $A_{\alpha,\beta}$ è ortogonale per $\beta = 0$.
(d) Per ogni valore di β, la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è sempre diagonalizzabile per $\alpha \neq 1$.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali della stessa dimensione n. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se T è iniettivo allora per ogni $w \in W$ esiste un unico $v \in V$ tale che $T(v) = w$.
(b) Il nucleo di T ha sempre dimensione > 0.
(c) Se il nucleo di T ha dimensione 0, esistono una base di V e una base di W tale che la matrice associata a T in tali basi è la matrice identica.
(d) L'immagine di T ha sempre dimensione n.

Q4) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli.

(a) Se la proiezione ortogonale di v su w è il vettore nullo, allora $\{v, w\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\langle v, w \rangle \neq 0$ allora v, w sono linearmente indipendenti.
(c) Vale sempre $\langle v + w, v - w \rangle \neq 0$.
(d) Se v, w sono linearmente indipendenti, allora $\langle v, w \rangle = 0$.

Q5) Siano $1 \leq m < n$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se il rango di A è pari a m, esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette esattamente una soluzione.
(c) Se il rango di A è m, allora il rango di A' è m.
(d) Se A' ha un minore $m \times m$ con determinante diverso da zero, allora il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette almeno una soluzione.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia r la retta ortogonale al piano $x + y - z = 1$ e passante per $(1, 1, -1)$.

(a) r contiene il punto $(2, 2, -1)$.
(b) r è parallela al piano $x - y = 0$.
(c) r è ortogonale al piano $x - y = 1$.
(d) r interseca ogni retta che contiene il punto $(0, 0, 0)$.

Q7) Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle u \wedge v, w \rangle = 0$ allora $\{u, v, w\}$ sono linearmente dipendenti.
(b) Lo spazio generato da $\{u, u \wedge v, u \wedge w\}$ ha sempre dimensione 3.
(c) Se $\{u, v, w\}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, allora $u \wedge v = u \wedge w = v \wedge w$.
(d) Sia V lo spazio generato da $\{u, v\}$. Supponiamo che V abbia dimensione 2. Se w appartiene a V, allora la proiezione ortogonale di w su $u \wedge v$ è sempre non nulla.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta passante per $(1, 1)$ e tangente al vettore $(1, 0)$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è minore della distanza di r dalla retta $y = 0$.
(b) l'equazione cartesiana di r è $x = 1, y = 0$.
(c) Esistono infinite rette ortogonali a r e passanti per $(1, 1)$.
(d) r è ortogonale al vettore $(0, 5)$.

Soluzioni:

Q1: a, c.
Q2: b, d.
Q3: a, c.
Q4: a
Q5: a, c.
Q6: b, d.
Q7: a.
Q8: d.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$. Sia r la retta ortogonale ai vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, -1, 1)$ e passante per $(2, 1, -1)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e quella parametrica della retta r.
(2) Determinare l'equazione cartesiana dei piani ortogonali a r.
(3) Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di triangoli i cui vertici sono $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e il terzo vertice è vincolato a muoversi sulla retta r. Determinare il triangolo T appartenente a $\mathcal{T}$ con area minima.
(4) Sia T' il triangolo della famiglia $\mathcal{T}$ il cui terzo vertice è $(1, 2, 0)$. Determinare l'immagine di T' dopo la rotazione di angolo $\pi/2$ in senso orario attorno alla retta r e determinare l'area di T' prima e dopo la rotazione.

Soluzione:

(1) Il vettore tangente alla retta r è $(1, 0, 1) \wedge (0, -1, 1) = (1, -1, -1)$. L'equazione parametrica della retta r passante per $(2, 1, -1)$ e parallela al vettore $(1, -1, -1)$ è $x = 2 + \lambda, y = 1 - \lambda, z = -1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e l'equazione cartesiana è $x + z = 1, y - z = 2$.
(2) I piani ortogonali alla retta r hanno equazione $x - y - z = d$, $d \in \mathbb{R}$.
(3) La retta r' sulla quale giacciono i vertici $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ del triangolo $\mathcal{T}$ e la retta r sono sghembe. Esiste una unica retta s perpendicolare a entrambe che le interseca. Il segmento che unisce i punti d'intersezione è l'altezza del triangolo $\mathcal{T}$. Quindi il punto C d'intersezione di r con s è il vertice cercato. La retta s è l'intersezione di due piani $s = \alpha \cap \beta$, dove α è il piano che contiene r' ed è parallelo al vettore v perpendicolare alle rette r ed r'. $v = (1, -1, -1) \wedge (1, -1, 0) = (-1, -1, 0)$. β è il piano che contiene r' ed è parallelo al vettore v. α passa per il punto $(2, 1, -1)$ ed è perpendicolare al vettore $(1, -1, -1) \wedge (-1, -1, 0) = (1, 1, 0)$ quindi ha equazione $x + y = 3$. β passa per il punto $(1, 0, 0)$ ed è perpendicolare al vettore $v = (1, -1, 0) \wedge (-1, -1, 0) = (0, 0, -2)$ quindi ha equazione $z = 0$. Le coordinate del vertice sono $C = (1, 2, 0)$.

    Alternativamente, il terzo vertice di un triangolo di $\mathcal{T}$ è dato da $P_\lambda = (2 + \lambda, 1 - \lambda, -1 - \lambda)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Siano $u_\lambda = P_\lambda - (1, 0, 0) = (1 + \lambda, 1 - \lambda, -1 - \lambda)$ e $v = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$. Allora l'area di del triangolo T_λ con terzo vertice P_λ è data da
$$\frac{1}{2}\|u_\lambda \wedge v\|.$$
    Risulta $u_\lambda \wedge v = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 2)$. Da cui $\|u_\lambda \wedge v\|^2 = 2(1 + \lambda)^2 + 4$. Il minimo di tale funzione si ha per $\lambda = -1$ e corrisponde al punto $C = (1, 2, 0)$. Si noti anche che l'area del triangolo T_{-1} è pari a 1.
(4) Un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R}' = \{O' : x', y', z'\}$ positivamente orientato nel quale la retta r coincida con l'asse z' (cioè abbia equazioni $x' = y' = 0$) si costruisce prendendo come nuovo origine O' un qualunque punto della retta, u_3 un vettore di lunghezza 1 tangente alla retta e u_1, u_2 due vettori ortonormali tra loro e ortogonali a u_3 e tali che $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$. Possiamo dunque prendere $0' = (2, 1, -1)$, e $u_3 = 1/\sqrt{3}(1, -1, -1)$. Costruiamo u_1, u_2 a partire da due vettori ortogonali alla retta. Possiamo dunque prendere $u_1 = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1)$ e, utilizzando Gram-Schmidt, $\tilde{u}_2 = (0, -1, 1) - \langle (0, -1, 1), u_1 \rangle u_1 = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, da cui $u_3 = \tilde{u}_3/\|\tilde{u}_3\| = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Si verifica direttamente che la base formata da u_1, u_2, u_3 è positivamente orientata.

    Denotiamo con P la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori della base del nuovo riferimento rispetto alla base del vecchio riferimento. Le coordinate X' dei vertici del triangolo nel sistema $\mathcal{R}'$ si ottengono dalle coordinate X del riferimento vecchio mediante $X' = P^t(X - O')$, quindi $A' = (1,0,0)_{\mathcal{R}'} = (0, 4/\sqrt{6}, -1/\sqrt{3})$, $B' = (0,1,0)_{\mathcal{R}'} = (-1/\sqrt{2}, 3/\sqrt{6}, -\sqrt{3})$, $C' = (1,2,0)_{\mathcal{R}'} = (0,0,-\sqrt{3})$.

La rotazione di angolo $\pi/2$ in senso orario attorno alla retta r è data dalla trasformazione $(x', y', z') \to (y', -x', z')$. Quindi $Y_1 = (4/\sqrt{6}, 0, -1/\sqrt{3})$, $Y_2 = (3/\sqrt{6}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $Y_3 = (0,0,-\sqrt{3})$ sono i vertici del triangolo nel riferimento $\mathcal{R}'$ dopo la rotazione.

Le coordinate dei vertici di questo triangolo nel sistema di riferimento originale $\mathcal{R}$ si recuperano mediante $X = PY + O'$. Quindi $X_1 = (\frac{5}{3} + 2/\sqrt{3}, \frac{4}{3}, 2/\sqrt{3} - \frac{2}{3})$, $X_2 = (1/\sqrt{6} + 1, 2 - 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ e $X_3 = (1,2,0)$ sono i vertici del triangolo ruotato (si noti che il terzo vertice appartiene a r e resta fisso durante la rotazione).

I due triangoli hanno la stessa area poiché la rotazione mantiene angoli e distanze ed è dunque una isometria. Quindi calcoliamo l'area di $\mathcal{T}$: L'area di un triangolo è uguale alla metà dell'area del parallelogramma di lati $A - B$, $C - B$. L'area del parallelogramma è pari alla norma del loro prodotto vettoriale: $\|[(1,0,0) - (0,1,0)] \wedge [(1,2,0) - (0,1,0)]\| = 2$. Quindi l'area del triangolo $\mathcal{T}$ è 1.